

HPM 视角下数列的教学策略研究——以前 n 项和公式为例

李东泽¹ 李书海^{1,2}

1 赤峰学院 数学与计算机科学学院, 内蒙古自治区赤峰市, 024000;

2 赤峰学院 民族数学教育研究所, 内蒙古自治区赤峰市, 024000;

摘要: 文章探讨了 HPM 视角下的教学方法, 即重构历史、追求自然发生教学法, 以激发学习动机和提高学习兴趣。《课标》要求学生理解数列概念, 掌握等差数列和等比数列公式, 并探索数列前 n 项和公式。教学中, 数学史的应用仍有限, 教师需更多融入数学史资源。文章提出课堂实践措施, 如 HPM 课例, 旨在渗透数学文化、优化教学设计, 并培养学生自主学习能力, 以实现数学史与数学教育的常态化融入。

关键词: HPM 视角; 数列的前 n 项和公式; 教学策略

DOI: 10.69979/3029-2735.25.2.016

《普通高中数学课程标准 2017 年版 2020 年修订》(以下简称《课标》) 以学生发展、立德树人、提升素养为教育改革的根本宗旨, 着力发展学科核心素养。培养学生全面发展不仅仅是德育课程教师的任务, 而是所有数学教师的首要责任, 通过数学史和数学教育的渗透和熏陶, 促进学生的数学核心素养发展。

1 HPM 的内涵

HPM 视角下数学教学的基本方法是重构历史、追求自然的发生教学法, 即以学生的认知起点出发, 凸显所学知识必要性, 呈现知识的自然发生过程, 激发学生的学习动机^[1]。通过数学史和数学教育的关系对教学策略进行研究, 为课堂教学提供新的视角, 帮助学生概念理解, 提高数学的学习兴趣。总的来说, HPM 为课堂教学提供丰富的资源和素材, 帮助学生在数学学习中培养良好的品德和价值观。

21 世纪以来中国 HPM 研究蓬勃发展, 融合赋能阶段 HPM 的研究精彩纷呈^[2]。研究内容更加多样的同时, 随着与教师发展、教材内容研究的不断深入, 高质量、实践性成果不断丰富, 产生具有示范作用的教学案例。鉴于此, 笔者对人教版“数列的前 n 项和公式”教学策略进行研究, 让学生更好地理解推导公式的发展历程以及在不同文化和时代中的应用。

2 教学定位

2.1 《课标》分析

《课标》要求学生理解数列的概念和表示方法, 感受数列与函数的共性和差异, 掌握等差数列和等比数列的通项公式并且探索数列前 n 项和公式, 了解数学归纳法的原理与应用, 通过数学史融入数学教学实践, 检验了数学史的教学价值。但总体而言, 数学史融入数学教学仍处于“高评价而低应用”的阶段^[3], 并未明确数列中蕴含的数学史和应用。虽然教师对数学史的教育价值普遍认可, 但在实际教学中的应用相对较少。一方面, 教师可能对数学史的了解有限, 缺乏融入教学的方法和资源; 另一方面, 考试压力和教学大纲的限制导致在教学中更重视知识的传授, 而忽略了数学史的应用。

2.2 教学内容分析

数列问题位于人教 A 版教科书选择性必修二第 4 章, 教材从掌握等差数列和等比数列的基本概念入手, 重点是理解其前 n 项和的对称性, 通过公式来计算。同时还介绍了数列求和技巧, 通过概念与实际问题相结合, 展示数列在现实世界中的应用。教学内容强调公式的推导过程, 让学生通过数学推导来加深对公式的理解, 掌握将这些公式应用于解决具体问题。但是通项公式中特殊到一般、循序渐进的特点, 在教材中并未明确表示, 蜻蜓点水般展示了递推公式, 学生难以体会蕴含其中的数学史。分析教材可以发现, 与显性的数列知识相比, 数学史与德育资源具有内隐性。深入研究知识的本质与来龙去脉, 需要精确掌握相关的数学史资料, 才能在教学过程中加以渗透。

2.3 资料分析

对于等差数列而言,在国内《九章算术》的作者已经会用通项公式、求和公式甚至更一般的公式来解决有关问题;在国外,《阿耶波多历算书》中给出等差数列许多公式,这些公式也出现在后面的数学家著作中^[4]。此外,历来数学家对等差数列前项和问题的推导展现出痴迷与渴望,是等差数列发展的源动力之一。相比于等差数列,等比数列前 n 项和公式的历史发展经历了一个漫长的过程,其起源可追溯到古代文明对数学的研究。古希腊时期,亚里士多德意识到某些无穷级数是可求和的,为后面等比数列求和奠定了基础;在《庄子·天下篇》中也提到“一尺之棰,日取其半,万世不竭”的说法,同样蕴含着等比数列求和思想。可以发现求和公式的发展是一个跨越不同文明和时代的连续过程,每个时期的数学家都在前人的基础上做出了自己的贡献。

3 课堂实践措施

案例 1 等差数列的 HPM 课例

教材选修第二册 4.2 节是“数列的概念”,前面的章节内容提出了为什么要学数列这章知识的原因,接下来就是介绍等差数列和等比数列的概念,而在后面的“阅读与思考”内容则是“中国古代数学家求数列和的方法”,挖掘教材中的章引言以及阅读材料中隐藏的史料后,可形成等差数列求和公式的课例。

片断 1 两本“书”的故事:古人最早的智慧

在现实生活和数学学习中,古人根据生活需要编写出适用于当时的数学文献。比如制作于公元前 1650 年的莱茵德纸草书是古埃及的数学文献,涵盖了算术、代数、几何学、三角学和分数等多个领域,其中包含与等差数列相关的问题。例如:“把 100 个面包分给 5 个人,使每人所得成等差数列,且使最大的三份之和的是最小的两份之和,问各得多少?”不仅展示了古人对分配问题的解决方法,也反映了他们对数学问题的实际应用能力。再如巴比伦晚期的泥版文书中,存在递减分物的问题。根据问题描述:“10 个兄弟要分配 100 两银子,其中长兄分得银子最多,兄弟的银子依次减少且相同数目相同。已知第八个兄弟分得了 6 两银子,找出相邻兄弟之间银子数量的差值。”这样的问题说明了当时的数学家已经能够处理等差数列的分配问题。这些史料让学生感受到古人对于美好生活的向往和严谨的态度,同时体会到其知识水平和应用能力,可帮助学生树立正确价值

观、世界观,渗透 HPM 中社会责任的内涵要求。

片断 2 《几何原本》与《九章算术》:感受不同文明下的多元文化

等差数列作为数学中的重要概念,它既是函数的特殊形式,又是不等式的判断方法;既是组合数学的拓展延伸,又对数论产生了深远的影响。因此从不同文明下讲解等差数列的求和公式推导过程,不仅让学生感受到中国传统文化的深厚,而且还体会到世界文化的多元。在《几何原本》中欧几里得使用了一种几何方法来证明等差数列的求和公式。通过定义数列得到序列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 其中每一项与前一项的差为常数 d 。然后对于等差数列的每一项 $a_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 构建一个矩形,其一边长为 a_k , 另一边长为 1。面积可以表示为 a_k , 因此等差数列的前 n 项和可以表示为 n 个矩形的面积之和。接着把矩形按顺序水平排列,形成一个大矩形的上半部分。再将这些矩形倒序排列,形成大矩形的下半部分。将倒序排列的矩形与原始排列的矩形合并,形成一个大矩形,其长为首项和末项之和 $a_1 + a_n$, 宽为项数 n 。计算面积为 $(a_1 + a_n) \times n$, 因此等差数列的前 n 项和 S_n 等于大矩形的面积的一半,即:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n$$

在《九章算术》中虽然没有严格数学证明,但是在例题展示了等差数列求和的思想:“今有金箠,长五尺。斩本一尺,重四斤;斩末一尺重两斤,问金箠重几何^[5]?”实际上是等差数列求和问题,其中金箠的重量不是平均分布的,每一尺都是不同的重量,项数为 5,要求计算出金箠的具体重量。解决这类问题的方法是通过列出数列的各项,然后通过观察和计算来求和,其实教材中还有很多值得深入挖掘的知识点,将史料融入数学实践。

案例 2 等比数列的 HPM 课例

作为一个单元主题,等比数列与等差数列教学过程有相似之处,求和公式的教学应该遵循一定的逻辑顺序,让学生在课前通过视频或在线材料自学等比数列的基础知识,课堂上则专注于讨论、问题解决和深化理解。结合多样化的教学方法,以确保学生能够全面理解并应用该公式。

片断 3 等比数列的诞生:一代代数学家艰辛

等比数列的概念源远流长,最早有意识地运用等比数列可追溯到古埃及时期。《莱茵德纸草书》就体现了等比数列的早期应用,随着社会的发展,欧几里得在《几

何原本》中展示了较为清晰、严谨的等比数列求和公式，在之后的一百年里，阿基米德展示了等比数列在几何问题中的应用，通过求和方法得到了抛物线的弓形面积。16世纪的数学家韦达在书中给出了无穷几何级数的求和公式，对等比数列求和的理解做出了巨大贡献。随着现代数学分析的兴起，等比数列成为了数学教育的核心内容之一。这段历史发展过程师生探索可以体会到：学会推导公式的理解和运用的同时，文字解题的晦涩和复杂与符号解题的简洁和便利形成鲜明的对比，从而发挥数学符号化对数学发展的促进作用。利用 HPM 素材开拓学生的视野，加深学生的思考，使得学生不再将数学局限于课本之中，而是以数学史为基石。通过了解前人的思维方式，深刻感受到对知识的渴望，通过了解知识的产生和发展过程，激发学生思考、探索的兴趣，起到发展学生核心素养的作用。

4 HPM 教学策略分析

4.1 渗透数学文化

教材中隐含的数学史资源具有内隐性，不是每节数学课都适合渗透，在课堂教学中找到数学史的渗透点，才能做到有的放矢^[6]。课堂中数学史教学的成功取决于诸多的课堂细节片段，将数学文化与物理学科融合，通过绘制抛物线图形，展现数学的跨学科性特征；引入哥德巴赫猜想、七桥等数学经典问题，激发学生的兴趣和探索欲望；引导阅读数学文化相关书籍，拓宽学生对数学的认知。在教学中，教师可以通过介绍数学史、数学文化等方式，让学生了解数学的发展历程和重要性，感受数学的文化魅力。

4.2 优化教学设计

因为数学是独特的，令人兴奋的，可以思考的，只有不合理的教学方法才能使数学变得枯燥乏味。教师可以通过优化教学设计，将数学知识与德育内容有机结合起来，让学生在学习数学的过程中，同时接受德育的熏陶。在掌握知识基础的前提下，教师结合物理、化学等学科相关内容，提供一些开放性的课题，让学生对比不同国家、不同时期的数学文化特点和差异，培养学生的多元文化意识，增强教学的直观性和吸引力的同时，拓宽学生的视野，让他们对数学心生热爱，欣赏数学的美

妙之处。对于不同水平的学生，可以让他们学会用不同的思路解决问题，从而更好地培养他们的创新意识和解决问题能力。

4.3 培养学生的自主学习能力

在学科德育教学过程中，不仅仅讲授数学概念、定理的发展历程，而是通过介绍故事与贡献了解知识的来龙去脉，并且鼓励学生进行数学调研。在开展数学文化活动的同时把思想方法渗透其中，不仅可以提升学科德育教学的效果，还可以促进学生在思想上的合作研究与学习。让学生在自主探索中发现数学文化的丰富性，发展学科核心素养，使学生感受到理性精神、人文关怀、人格品质、社会责任的价值。

5 结语

在课堂中充分挖掘育人价值，仅仅策略研究入手具有一定的局限性，但研究目的是策略具有推广性，希望实现数学史与数学教育融入教学的常态化。数学教学还需要众多数学教师面对学生不断实践、总结和大胆思考的努力，实现融入课堂的常态化，笔者的探索仅仅是起步，本文只是抛砖引玉，期待更多的数学教育者加入研究。

参考文献

- [1] 汪晓勤,王苗,邹佳晨.HPM 视角下的数学教学设计:以椭圆为例[J]. 数学教育学报,2011,20(05):20-23.
 - [2] 殷如意,刘冬冬,李艳辉.融合赋能阶段中国 HPM 的研究与发展——以《数学教育学报》《数学通报》《中学数学月刊》载文为例[J]. 中学数学月刊,2024,(01):57-63.
 - [3] 栗小妮.HPM 视角下数学学科德育的案例研究[D]. 华东师范大学,2020.
 - [4] 汪晓勤著.HPM 数学史与数学教育[M]. 北京:科学出版社,2017.05.
 - [5] 郭书春译注.九章算术[M]. 沈阳:辽宁教育出版社,1998.07.
 - [6] 刘丽丽.融入数学文化助推学科核心素养落地[J]. 福建教育学院学报,2021,22(08):32-35.
- 作者简介:李东泽(2000.05-),男,汉族,河北沧州,在读硕士研究生,赤峰学院数学与计算机科学学院,研究方向:数学教育。