聚知刊出版社
JZK publishing

首达时间 $H(i,i)\neq 0$ 时的修正本征时间

林清浩 [1,2] 黄煜可 [1,2（通讯作者）]

1 北京邮电大学数学科学学院，北京，100876；

2 数学与信息网络教育部重点实验室（北京邮电大学），北京，100876；

摘要：Aldous 和 Fill 定义了本征时间，它是一个网络全局特征，指的是从网络中任意节点 i 到达节点 j 的期望时间。经典本征时间默认节点 i 回到自身的首达时间 $H(i,i)=0$。但在一些研究领域，有必要考虑节点 i 回到自身的首达时间，也就是 $H(i,i)\neq 0$ 的情况。由此，本文定义了一种修正本征时间，并给出了修正本征时间的公式、及其与经典本征时间的关系。

关键字：首达时间；本征时间；修正本征时间

DOI：10.69979/3041-0673.26.02.103

引言

本征时间(eigentime identity)是一个网络全局特征，指的是从网络中任意节点 i 到达节点 j 的期望时间。本征时间刻画了网络上节点间的通行时间，能够一定程度上反应网络的通信交流效率。本征时间一词最早由美国科学院外籍院士 David Aldous 和国际数理统计学会会士 Fill Jim [1]提出，他们在文中证明了本征时间是一个与初始节点选取无关的定值，并且数值上等于归一化 Laplace 矩阵的非零特征值倒数和。沃尔夫奖得主、匈牙利数学家 Lovász [2]用图谱理论方法同样证明了这一结论。图谱理论中经常用到的 Laplace 矩阵，其还有许多用处，例如用来计算网络上的基尔霍夫指数(Kirchhoff index) [3]。

本征时间概念中提到的期望时间指的是首达时间(hitting time 或 access time 或 first passage time，下文用 hitting time 指代)的期望。Hitting time 是一个与网络科学相关的重要指标，在现实应用领域有许多重要用处。例如在通信领域，可以研究通信网络上电子的分布及通信传输时间，以衡量网络的通信效率；在网络安全领域，可以用 hitting time 衡量模拟攻击者到防守端的攻击事件的时间，以改进相关算法安全性。

本征时间有许多相关研究，在不同网络上研究网络的本征时间往往能得到不同的有趣的结果。可逆马尔科夫链通过编号可以视作简单的无向图网络，Mao[4]研究了连续时间遍历马尔科夫链上的本征时间。还有一类经常应用本征时间指标的网络是分形网络。顾名思义，分形网络是一类具有分形特性的网络。因为分形对象具有良好的自相似性，分形网络在局部拥有着整体网络相似的性质，在此在网络规模扩大时能获得一定的规律性，便于科学研究的展开。这是现实中复杂网络所不具备的特性，因此分形网络是探究网络上本征时间的重要研究对象。例如：Dai 等[5]研究了带权重的 Cayley 网络，Ye-Gu-Xi[6]研究了分形花网络。一般网络的本征时间研究则可能非常复杂，通常需要用程序模拟来研究。

本文第 2 节介绍相关基础知识，说明转移概率矩阵与归一化 Laplace 矩阵特征值计算本征时间的区别；第 3 节考虑节点 i 到自身的 hitting time 不为 0 时的情况，得到修正本征时间以及它和经典本征时间之间的关系。

1 相关基础知识

给定图 $G=(V,E)$，其中 $V=\{1,2,\cdots,n\}$为节点集合，E 为边集合。定义图 G 的邻接矩阵 $A=\left(A_{ij}\right)$，节点 i 的度 $d(i)=\sum_j A_{ij}$，总度数 $d=\sum_i d(i)$，度矩阵 $D=\mathrm{diag}\{d(1),d(2),\cdots,d(n)\}$。

图 G 的概率转移矩阵 $P=D^{-1}A=\left(p_{ij}\right)$，归一化 Laplace 矩阵

$$M=D^{-\frac{1}{2}}(D-A)D^{-\frac{1}{2}}=I-D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}=\left(M_{ij}\right).$$

由定义有 $M=D^{\frac{1}{2}}(I-P)D^{-\frac{1}{2}}$，M 和 $I-P$ 相似。

在平稳分布状态下，节点当前状态分布在经过转移后能够保持不变。记平稳分布$\pi=\left(\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n)\right)^{T}$，则需满足条件 $\begin{cases}\pi^{T}P=\pi^{T}\\ 1^{T}\pi=1\end{cases}$，其中 1 表示$(1,1,\cdots,1)^{T}$。对于连通、非二部图来说

$$\pi(i)=\frac{d(i)}{d}, i=1,2,\cdots,n. \quad (1)$$

满足平稳分布的要求，由(1)得到的$(\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n))^T$就是图 G 上的一个平稳分布。

用记号 $H(i,j)$表示从节点 i 到节点 j 的 hitting time。经典本征时间[1]要求 $H(i,i)=0$，即一个节点自身到自身的 hitting time 为 0。

记经典本征时间为 ET，其定义为

$$ET=\sum_{s,t}\pi(s)\pi(t)H(s,t),$$

即以平稳分布概率选取任意两个节点 s,t 的 hitting time $H(s,t)$，遍历所有节点。在[1]中均已证明 $ET=\sum_{k=2}\frac{1}{1-\lambda_k}$，其中$\lambda_k$是转移概率矩阵 P 的特征值。记 $ET_s=\sum_t\pi(t)H(s,t)$，[1]证明：ET_s是一个与初始点 s 选取无关，只与转移概率矩阵特征值相关的定值$\sum_{k=2}\frac{1}{1-\lambda_k}$。

在本征时间的应用[4]中，通常使用 $ET=\sum_{k=2}\frac{1}{\lambda_k}$ 来计算网络的本征时间。注意，这里的λ_k是归一化 Laplace 矩阵 M 的特征值。因为 M 和 $I-P$ 相似，M 的特征值λ_M相对应于 $I-P$ 的特征值 $1-\lambda_P$，这保证了两种定义的一致性且方便计算。下文用 M(或 $I-P$)的特征值λ_k计算本征时间。

2 $H(i,i)\neq 0$ 时的本征时间

在一些研究领域，有必要考虑节点 i 回到自身的首达时间，即 $H(i,i)\neq 0$ 的情况。这意味着节点 i 从自身出发，先去往别的节点后再返回自身。下面沿用[2]中得到 hitting time 的方法，得到 $H(i,i)\neq 0$ 时的 hitting time 以及在此基础上得到修正本征时间。

根据重期望公式有

$$H(i,j)=p_{ij}\times 1+\sum_{k\neq j}p_{ik}\left(1+H(k,j)\right)=1+\sum_{k\neq j}p_{ik}H(k,j)$$

写成矩阵形式为

$$H=J+P(H-A)=J+PH-PA \quad (2)$$

这里 J 是全为 1 的 n 阶矩阵，即 $J=11^T$；A 是由 H 的主对角线构成的矩阵，即

$$A=\mathrm{diag}\{H(1,1),H(2,2),\cdots,H(n,n)\}.$$

在(2)等式两边同时左乘π^T，将会得到

$$1^T=\left(\pi(1)H(1,1),\pi(2)H(2,2),\cdots,\pi(n)H(n,n)\right),$$

由此算得 $H(i,i)=\frac{1}{\pi(i)}=\frac{d}{d(i)}$和 $A=dD^{-1}$。若将图视为马尔科夫过程，则此结论与节点的返回时间相符合。

于是等式(2)可以改写成

$$(I-P)H=J-dPD^{-1} \quad (3)$$

求解(3)式中的 H 转而为求解方程组

$$\begin{cases}(I-P)X=J-dPD^{-1}\\ X(i,i)=\dfrac{1}{\pi(i)},\forall i\in V\end{cases} \quad (4)$$

观察(4)式与[2]求解过程中得到的方程组

$$\begin{cases}(I-P)X=J-dD^{-1}\\ X(i,i)=0,\forall i\in V\end{cases}$$

发现两者在 $X(i,j),i\neq j$ 处是同解的，后者的解形式为

$$H(i,j)=\begin{cases}d\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{\lambda_k}\left(\dfrac{v_{kj}^2}{d(j)}-\dfrac{v_{ki}v_{kj}}{\sqrt{d(i)d(j)}}\right),i\neq j\\ 0,i=j\end{cases},$$

因此方程组(4)的解具体形式为

$$H(i,j)=\begin{cases}d\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{\lambda_k}\left(\dfrac{v_{kj}^2}{d(j)}-\dfrac{v_{ki}v_{kj}}{\sqrt{d(i)d(j)}}\right),i\neq j\\ \dfrac{d}{d(i)},i=j\end{cases},$$

其中v_{ki}是 M 的λ_k特征值对应的单位正交向量的第 i 个分量。

最后求解 $H(i,i)\neq 0$ 时的本征时间，由于是同解，结论也是类似。定义修正本征时间为$\widetilde{ET}$，有

$$\widetilde{ET}_i=\sum_j\pi(j)H(i,j)=\pi(i)H(i,i)+\sum_{j\neq i}\pi(j)H(i,j)$$
$$=1+ET_i=1+\sum_{k=2}\frac{1}{\lambda_k},$$

$$\widetilde{ET}=\sum_i\pi(i)\widetilde{ET}_i=\left(1+\sum_{k=2}\frac{1}{\lambda_k}\right)\sum_i\pi(i)=1+\sum_{k=2}\frac{1}{\lambda_k},$$

这就是本文的两个主要定理。

定理 1. [修正本征时间与经典本征时间的关系] $H(i,i)=0$ 时的修正本征时间$\widetilde{ET}$等于 $H(i,i)=0$ 时的经典本征时间 ET 加 1，即 $\widetilde{ET}=1+ET$。

定理 2. [运用特征值计算修正本征时间] 修正本征时间

$$\widetilde{ET}=1+ET=1+\sum_{k=2}\frac{1}{\lambda_k}$$

其中λ_k是归一化 Laplace 矩阵的特征值。

3 总结

本文介绍了本征时间的研究背景与基础知识。经典本征时间 ET 要求 $H(i,i)=0$，本文考虑 $H(i,i)\neq 0$ 时的修正本征时间$\widetilde{ET}$。得到了修正本征时间的表达式$\widetilde{ET}=1+\sum_{k=2}\frac{1}{\lambda_k}$以及关系式$\widetilde{ET}=1+ET$。

参考文献

[1]Aldous D，Fill J. Reversible Markov chains and random walks on graphs，2002[J]. Unfinished monograph，recompiled，2014，2002.
[2]Lovász L. Random walks on graphs[J]. Combinatorics，Paul erdos is eighty，1993，2(1-46)：4.
[3]Wang D，Zeng C，Zhao Z，et al. Kirchhoff index of a class of polygon networks[J]. Chaos，Solitons & Fractals，2023，168：113149.
[4]Mao Y H. The eigentime identity for continuous-time ergodic Markov chains[J]. Journal of applied probability，2004，41(4)：1071-1080.
[5]Dai M，Wang X，Zong Y，et al. First-order network coherence and eigentime identity on the weighted Cayley networks[J]. Fractals，2017，25(05)：1750049.
[6]Ye Q，Gu J，Xi L. Eigentime identities of fractal flower networks[J]. Fractals，2019，27(02)：1950008.