类比法在二重积分中的应用

邱迎阳

江苏师范大学 科文学院，江苏徐州，221000；

摘要： 高等数学是我国普通高等院校广泛开设的一门基础课程。在高等数学复杂课程体系和抽象逻辑运用中，类比法是行之有效的思维方式和必要的教学手段，可有效提升教学质量并优化教学效果。类比法通过将已知事物与未知事物建立联系，使学生借助初等数学相关知识点的触类旁通，发散逻辑思维能力，淡化对新知识的陌生感，快速接纳并融入高等数学的学习。本文以二重积分为例，阐述类比法在高等数学教学中的应用。

关键词： 类比法；高等数学；二重积分

The Application of Analogy in the Concept of Double Integral

Qiu　Yingyang

Jiangsu Normal University KeWen College, Xuzhou, Jiangsu, 221000；

Abstract: Advanced mathematics is a fundamental course widely offered in ordinary higher education institutions in China. In the complex curriculum system and abstract logic application of higher mathematics, analogy is an effective way of thinking and necessary teaching method, which can effectively improve teaching quality and optimize teaching effectiveness. The analogy method establishes connections between known and unknown things, enabling students to use the analogy of elementary mathematics related knowledge points to expand their logical thinking ability, reduce their unfamiliarity with new knowledge, and quickly accept and integrate into the study of higher mathematics. This article takes double integration as an example to illustrate the application of analogy method in higher mathematics teaching

Keywords: The analogy method; higher mathematics; double integral

DOI： 10.69979/3029-2735.26.01.035

高等数学作为一门应用性极强的基础学科，是我国高等院校广泛开设的一门基础课程[1]。高等数学有其固有的特点即高度的抽象性、复杂的计算性和严密的逻辑性，其中抽象性和计算性是高等数学最基本和最显著的特点，它不在局限于简单的数值计算和几何图形，而是更多地关注数学概念和结构的本质属性，这些特点使得高等数学能更深入地揭示其本质规律，才能更好的应用高等数学这门课程。而严密的逻辑性是指在高等数学理论的归纳和整理中，无论是概念的表述，还是判断和推理，都要运用逻辑的规则，遵循思维的规律。所以说，高等数学也是一种思想方法，学习高等数学的过程就是思维训练的过程。类比法作为数学思维训练中最基本的创新思维方式，以学生的认知规律和问题的逻辑思路为依托，从已知出发探索未知，致使学生更容易深入和掌握新知识。根据数学由浅入深的发展规律，初等数学主要研究规则的、平直的几何图形和均匀、有限过程的常量，以静止观点研究问题；而高等数学主要研究事物运动中的数量变化规律，具体来说，主要研究不规则、弯曲的几何对象和非均匀、无限过程的变量[2]。那么合理的在高等数学教学实践中使用类比法可使学生融会贯通，淡化对新知识的陌生感，尽快适应并接纳高等数学课程的学习。在高等数学这门课程中知识的主体主要分为一元微积分学和多元微积分学，二重积分作为多元微积分学中不可或缺和较难理解的一部分，对其应用类比法能够提高课堂效率同时也可以提高学生对二重积分的理解和应用。

1 类比法的基本内涵

在数学中，类比法就是根据两种不同的数学对象之间在某些方面特征相似或者相同，可能会出现两种情况：（1）推测出它们在其他方面也有可能相似或相同（2）用解决事物 A 的类似方法来解决事物 B [3]。我们仔细分析高等数学这门课程的知识结构及内容之间的关系时，不难发现存在着丰富的可作类比的内容。而本文主要来讨论类比法所对应的（2）解题，为了对比的更加清楚在此运用框架图来表示类比法的解题思路，如图 1

图 1 表明如果对象 A 和对象 B 具有相同的某种特

 聚知刊出版社
JZK publishing

征，而对象 A 是通过步骤 1 步骤 2 步骤 3 解决的，猜想进行分析对象 A 的解题思路能否推广到对象 B 中？

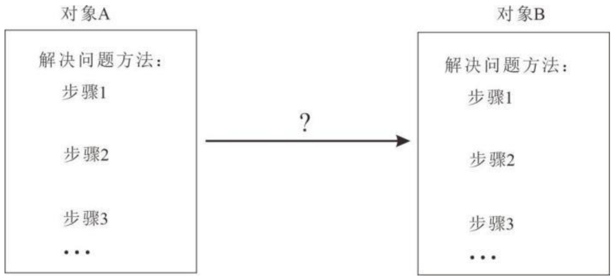

图 1 类比法解题思路

2 类比思想在二重积分中的应用

在高等数学教学中，类比的思想被广泛利用。高等数学主要包括一元函数微积分和多元函数微积分两大部分，它们是相互独立的，却又是相互联系的。特别是在一元微积分的基础上，对于多元函数的许多概念都可以进行类比，比如：n 元函数的极限、连续、偏导数、全微分、多元复合函数求导法则、重积分等重要概念都能与一元函数的极限、连续、导数、微分、复合函数求导法则、积分相类比。二重积分作为研究不规则平面的重要手段，是首次在高等数学中将二维空间上升到三维空间，学习难度也随即上升，本文把引出定积分概念的理论思想类比到二重积分以期降低对二重积分概念理解的难度[4]。

2.1 定积分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负、连续。求直线 $x=a, x=b, y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积（图 2）。

分割：随机插入 n 个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间：$[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, ⋯, $[x_{n-1},x_n]$,由于区间任意分割，所以每个区间的区间长度 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 不尽相同。

近似：任取一个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 做近似即用小矩形的面积来近似代替小曲边梯形的面积，小矩形的宽为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，长则任取 $i\in[x_{i-1},x_i]$，以 i 处所对应的函数值 $f(\xi_i)$ 作为小矩形的长，则可以得到 $[x_{i-1},x_i]$ 所对应的小曲边梯形的面积的近似值为 $f(\xi_i)\Delta x_i$。

求和：如果被分割后的 n 个小的曲边梯形都用小的矩形的面积来近似代替，那么就可以得到大的曲边梯形面积 A 的近似值

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

取极限：这个阶段要探究曲边梯形面积 A 的精确值，就要考虑矩形的面积和曲边梯形的面积在何条件下最接近，不难发现当区间长度 Δx_i 越小，小矩形的面积越接近小曲边梯形的面积，又因为在对区间进行划分时是任意插入分点，所以每个区间长度不同，要想保证所划分的每个小的矩形的面积和小的曲边梯形的面积接近，只需要区间长度最长的趋近于 0，就可以保证所有的区间长度都无限缩小，记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，则曲边梯形面积为

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

这个极限形式即为定积分的定义式，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

以上阐述了通过分割、近似、求和、取极限四个步骤解决了曲边梯形的面积问题，那么学习二重积分是要解决一个曲顶柱体的体积，同样像上述过程一样，曲顶柱体的体积无法直接取得，需要借助定积分概念得出的经验，利用类比思想给出曲顶柱体体积的求解过程：

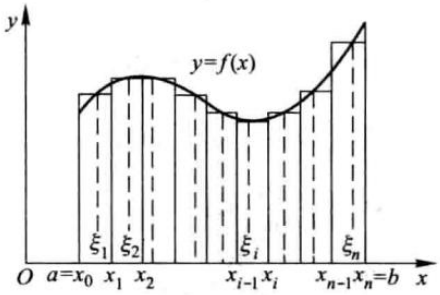

图 2　曲边梯形

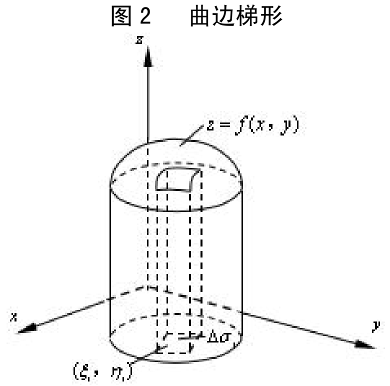

图 3　曲顶柱体

2.2 二重积分的定义

求底为 xoy 平面上闭区域 D，顶为曲面 $z=f(x,y)$ 侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面的曲顶柱体的体积（图 3）.

分割：将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\ldots,\Delta\sigma_n$。其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域，同时也表示第 i 个小区域的面积，由于是任意分割，所以每个小区域的面积不尽相同。

近似：用平顶柱体的体积近似代替小曲顶柱体的体积，那小平顶柱体的体积怎么求呢？即在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，以该点所对应的函数值 $f(\xi_i,\eta_i)$ 作为小平顶柱体的高，$\Delta\sigma_i$ 表示小平顶柱体的底面面积，则可以得到小平顶柱体的体积即小曲顶柱体体积的近似值 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$。

求和：如果被分割后的 n 个小的曲顶柱体体积都用小的平顶柱体体积来近似代替，那么就可以得到大的曲顶柱体体积的近似值

$$V\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

取极限：像定积分一样，要考虑在何时曲顶柱体的体积和平顶柱体的体积最接近，简单点说就是划分的区域越小越接近，就是说当各小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 直径中的最大值 λ 趋于零时，就可以保证无限接近，那么该极限称为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积，记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

2.3 小节

二重积分的定义是高等数学相对较难理解的一部分内容，特别是从二维空间上升到学生比较陌生的三维空间，面积上升到体积，但通过类比法的思想，引导学生类比定积分的概念对曲顶柱体进行分割、近似、求和、取极限得到二重积分的概念显得相对简单一些。

3 总结

任何学习的知识都是循序渐进的，一般情况下低维空间的知识相对比较简单，更容易理解。高维空间中的许多内容都是低维空间的一个延伸，在高维空间中善用类比法会使学生对新知识的理解难度降低，学习起来更加轻松，同时通过类比，建立新旧知识间的内在关系，使知识体系更加完整化，因此在深入推进高校数学课程教学改革的过程中，可以根据教学内容，合理有效利用类比法，提高教学效果，达到事半功倍的效果。

参考文献

[1]同济大学数学系.高等数学第七版—上册.高等教育出版社,2014.
[2]同济大学数学系.高等数学第七版—下册.高等教育出版社,2014.
[3]蔡琳文,陈跃辉.大学数学教学中类比法的应用[J].闽南师范大学学报：自然科学版,2018,31(1):4.
[4]金今姬,李松涛.关于微积分教学中类比分析法的探索[J].吉林广播电视大学学报,2019,07.

作者简介：邱迎阳（1991.02.16—），女，汉族，河南洛阳人，研究生，职称：助教，研究方向：数学物理方程。