

# 二维箱型水平井渗流模型的构造解法

袁铭聪 李伟 (通讯作者)

西华大学应用数学研究所, 四川成都, 610039;

**摘要:** 水平井具有提高油井产量, 适应复杂地质条件等优势, 在许多油田上都得到广泛的应用, 对于高效开发油田具有重大意义。我们对二维水平井渗流模型进行研究, 减少了复杂性, 在早期阶段或在对地质情况较为简单的区域, 二维模型能够帮助我们快速获得基本的结果, 从而节省时间和成本。本文利用相似构造法求解了二维水平井渗流模型在不同边界影响下的半解析解, 具体研究内容如下: 综合运用有限 Fourier 正余弦变换和 Laplace 变换, 结合油气藏渗流模型的构造理论, 分别考虑顶底不渗透边界和恒压边界组合的四种情况, 以及井筒水平垂向方向的三种边界条件情况, 求得了具有连分式形式的解式, 发现了全新的水平井核函数  $G$ 。最后利用 Stehfest 反演将该解由 Laplace 空间反演到实空间, 画出特征曲线, 进而实现了储层参数对解的影响分析。这项研究不仅为编制试井分析软件提供了便利, 提高计算效率, 并且对水平井的求解提供了一种新的方法。

**关键词:** 边值问题; 二维水平井; 构造方法; 相似核函数

**DOI:** 10.69979/3041-0673.25.10.100

## 引言

水平井作为一种高效的油井, 以其显著提高油井产量、适应复杂地质条件的特性, 在众多油田中得到了广泛的应用。通过深入研究水平井的边值问题, 可以更加准确地预测油井产能与产量, 有助于优化油田的开发方案, 提高石油资源的采收率, 从而实现油田的高效开发。在国内外已经有许多对水平井渗流模型的研究。早在 1987 年 Goode<sup>[1]</sup> 等已经对箱型油藏水平井的压力恢复和压降试井分析模型进行了研究, 得到了时间与压力的半对数关系曲线。Ozkan<sup>[2-3]</sup> 等人提出的水平井模型得到了广泛应用, 涵盖了盒状和圆柱形油藏。他们使用格林函数进行求解, 获得了不同油藏在各种边界条件下的解的表达式。1994 年, 李晓平<sup>[4]</sup> 利用杜哈美原理建立了考虑井筒储存和表皮效应影响时该类水平井不定常渗流的数学模型, 作出了水平井的无因次压力及压力导数典型曲线, 为水平井试井分析打下了理论基础。2019 年, 姜瑞忠<sup>[5]</sup> 等建立了考虑非线性系数的双重介质低渗透油藏水平井试井新模型, 用有限元方法进行求解, 绘制试井典型曲线, 对数值解的正确性进行验证。2022 年吴明录<sup>[6]</sup> 建立了双重孔隙介质三区复合油藏稠油热采水平井试井模型, 对裂缝性稠油油藏中蒸汽吞吐水平井的压力动态进行预测。

2006 年, 李顺初等<sup>[7-8]</sup> 获得了复合型 Bessel 方程组

定解问题和复合变型 Bessel 方程组定解问题解的相似结构, 该研究为相似构造法的进一步发展与研究打下了很好的理论基础, 该方法可以引入到渗流模型的求解当中。2006 年至 2008 年, 郑鹏社、徐昌学、李顺初<sup>[9-15]</sup> 等人建立了三种外边界条件下的复合油藏、分形复合油藏和复合双孔介质油藏试井分析模型, 这个模型将井筒储集和表皮效应考虑在内。油藏在不同的外边界条件下解的表达式具有相似结构, 不同的外边界条件对应不同的相似核函数。2013 年, 李顺初<sup>[16]</sup> 等人得到了分形油藏球型渗流模型的相似构造解。同年李顺初<sup>[17]</sup> 等人又研究出分形油藏双孔渗流模型的相似构造解, 为分形油藏的进一步产量研究打下良好的基础。2020 年, 张红丽<sup>[18]</sup> 引入弹性外边界, 求得了弹性外边界下均质球向流油藏问题解的相似结构。相似构造法在渗流力学研究领域获得了广泛应用, 并促进了石油工程中试井分析软件的研制开发。

在前人的研究基础上, 本文旨在深入探讨和分析二维水平井在不同边界条件下的模型, 将相似构造法引入到二维水平井模型求解当中。利用 Fourier 变换、Laplace 变换和相似构造法求解后, 进一步考虑井筒储集与表皮因子的影响, 得到平均地层压力解的连分式解式, 发现水平井和直井的连分式解式中的核函数并不相同, 不同的顶底边界条件对应不同的核函数  $G$ 。最终利用 S

tehfest 数值反演法将 Laplace 域的解反演到实空间中，并绘制了双对数曲线图版进行敏感性分析，证实了方法的可行性。该方法可以避免冗长的计算过程，简化试井软件编译的过程，为水平井模型求解提供新思路。

## 1 二阶齐次常微分方程的相似构造方法

对于如下二阶线性齐次常微分方程的边值问题：

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ [Ey + (1 + EF)y']_{x=a} = D \\ [Gy + Hy']_{x=b} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi_{1,0}(\xi, x) = \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_{0,0}(\xi, x) = y_1'(\xi)y_2(x) - y_2'(\xi)y_1(x) \quad (3)$$

$$\varphi_{0,1}(\xi, x) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{0,0}(\xi, x) = y_1(\xi)y_2'(x) - y_2(\xi)y_1'(x) \quad (4)$$

$$\varphi_{1,1}(\xi, x) = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x} \varphi_{0,0}(\xi, x) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \varphi_{0,0}(\xi, x) = y_1'(\xi)y_2'(x) - y_2'(\xi)y_1'(x) \quad (5)$$

以上定义的二元函数具有重要的作用，这里我们把它称作引解函数。利用它们我们可以构造出边值问题式的解析解。

定理 1 若边值问题 (1) 式有唯一解，则其解可以表示为如下连分式形式：

$$y(x) = D \cdot \frac{1}{E + \frac{1}{F + \Phi(a)}} \cdot \frac{1}{F + \Phi(a)} \cdot \Phi(x) \quad (6)$$

这里的连分式形式我们称作边值问题 (1) 式解的相似结构。

其中：

$$y(x) = \Phi(x) = \frac{G\varphi_{0,0}(x, b) + H\varphi_{0,1}(x, b)}{G\varphi_{0,1}(a, b) + H\varphi_{1,1}(a, b)} \quad (7)$$

这里我们叫做解的相似核函数。因此，我们很容易通过代数的方法构造与 (1) 式相等价的渗流方程的解析解。

## 2 渗流模型的建立

### 2.1 物理模型

其中  $D, E, F, G, H, a, b$  均为已知的实常数，且  $D \neq 0, G^2 + H^2 \neq 0, a < b$ ；已知函数  $p(x) \in C^1[a, b], q(x) \in C^2[a, b]$ 。

假设  $y_1(x), y_2(x)$  是边值问题 (1) 式中的定解方程的两个线性无关的解，引入二元函数：

$$\varphi_{0,0}(\xi, x) = y_1(\xi)y_2(x) - y_2(\xi)y_1(x) \quad (2)$$

并记：

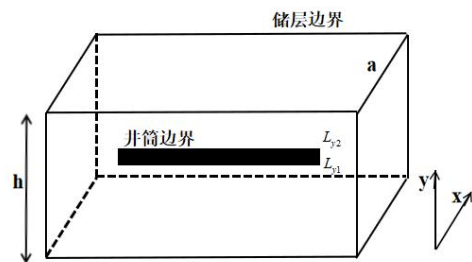


图 1 箱型地层二维水平井物理模型

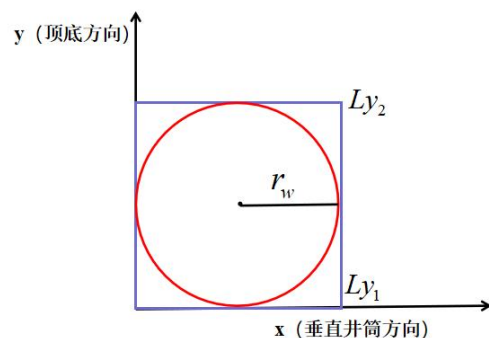


图 2 二维水平井井筒截面图

本文研究的模型为箱型地层的二维水平井，物理模型如图 1 所示，井筒截面图如图 2 所示。为了使模型更具体，做以下的假设和描述：

(1) 井筒半径为  $r_w$ ，初始地层压力为  $P_0$ 。

(2) 顶底方向井筒长度为  $L_{y2} - L_{y1}$ 。

(3) 微可压缩具有恒定的粘度和可压缩系数，单向流动服从达西定律。

(4) 忽略重力和毛细管力的影响，考虑井筒储集与表皮因子。

(5) 渗透率符合各向异性。

## 2.2 数学模型

二维水平井的渗流方程表示为：

$$K_x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \mu \phi_0 C_t \frac{\partial P}{\partial t} \quad (8)$$

初始条件：

$$P(x, y, 0) = 0 \quad (9)$$

产量条件：

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=r_w} = -\frac{\mu \pi}{2k_x} V_w \quad (y_1 \leq y \leq y_2) \quad (10)$$

顶底方向边界条件：

$$\begin{aligned} P|_{y=0,h} = P_0 \text{ 或 } \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=0,h} = 0 \\ \text{或 } P|_{y=0} = P_0, \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=h} = 0 \text{ 或 } \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, P|_{y=h} = P_0 \end{aligned} \quad (11)$$

垂直井筒方向边界条件：

$$\text{边界无穷大时 } P|_{x \rightarrow \infty} = P_0$$

$$\text{边界定压时 } P|_{x=a} = P_0$$

$$\text{边界不渗透时 } \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad (12)$$

## 2.3 数学模型的无量纲化

定义如下无因次变量：

$$\begin{aligned} P_D &= \frac{2\pi K_x L_w}{Q\mu} (P_0 - P) ; \quad t_D = \frac{K_x}{\phi C_t \mu r_w^2} t ; \\ C_D &= \frac{C}{2\pi \phi C_t L_w r_w^2} ; \quad \rho = \sqrt{\frac{K_y}{K_x}} \frac{r_w}{h} ; \\ V_{wD} &= \frac{2\pi r_w L_w}{Q} V_w ; \quad x_D = \frac{x}{r_w} ; \quad y_D = \frac{y}{h} ; \end{aligned}$$

式中：K 为油藏渗透率， $\mu\text{m}^2$ ；h 为油层厚度，

m； $\mu$  为流体黏度， $\text{mPa} \cdot \text{s}$ ； $C_D$  为井筒储集系数，无因

次； $S$  为表皮系数，无因次； $p_{wD}^*$  为水平井平均压力。

则式 (8) - (12) 无量纲化形式如下：

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial x_D^2} + \rho^2 \frac{\partial^2 P_D}{\partial y_D^2} = \frac{\partial P_D}{\partial t_D} \quad (13)$$

$$P_D(x_D, y_D, 0) = 0 \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial P_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = \frac{\pi}{2} V_{wD} \quad (y_{1D} \leq y_D \leq y_{2D}) \quad (15)$$

$$P_D|_{y_D=0,1} = 0 \text{ 或 } \left. \frac{\partial P_D}{\partial y_D} \right|_{y_D=0,1} = 0$$

$$\text{或 } P_D|_{y_D=0} = 0, \left. \frac{\partial P_D}{\partial y_D} \right|_{y_D=1} = 0 \text{ 或 } \left. \frac{\partial P_D}{\partial y_D} \right|_{y_D=0} = 0, P_D|_{y_D=1} = 0 \quad (16)$$

$$P_D|_{x_D \rightarrow \infty} = 0$$

$$P_D|_{x_D=\frac{a}{r_w}} = 0$$

$$\left. \frac{\partial P_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=\frac{a}{r_w}} = 0 \quad (17)$$

式 (13) - (17) 为二维箱型水平井的无因次模型。

## 3 数学模型的求解及相似结构

考虑水平井顶底不渗透边界和恒压边界组合的四种情况下的渗流方程，对 (13) - (17) 式构成的无因次渗流模型中变量  $y_D$  作有限 Fourier 正余弦变换。

有限 Fourier 正余弦变换：

$$F_s[P_D(x_D, y_D, t_D)] = \int_a^b \sin(k\pi x_D) P_D dx_D = \widetilde{P}_D$$

$$F_c[P_D(x_D, y_D, t_D)] = \int_a^b \cos(k\pi x_D) P_D dx_D = \widetilde{P}_D$$

变换后的渗流方程和产量条件如下：

情形一：顶底为恒压边界时，我们采用有限 Fourier 正弦变换，变换核为  $\sin k\pi x$ 。

$$\frac{\partial^2 \widetilde{P}_D}{\partial x_D^2} - (\rho m \pi)^2 \widetilde{P}_D = \frac{\partial \widetilde{P}_D}{\partial t_D} \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial \widetilde{P}_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = -\frac{V_{WD}}{2m} [\cos(m\pi y_{2D}) - \cos(m\pi y_{1D})] \quad (19)$$

情形二：顶底为不渗透边界时，我们采用有限 Fourier 余弦变换，变换核为  $\cos k\pi x$ 。

$$\frac{\partial^2 \widetilde{P}_D}{\partial x_D^2} + (\rho m \pi)^2 \widetilde{P}_D = \frac{\partial \widetilde{P}_D}{\partial t_D} \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial \widetilde{P}_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = \frac{V_{WD}}{2m} [\sin(m\pi y_{2D}) - \sin(m\pi y_{1D})] \quad (21)$$

情形三：底部为恒压边界顶部为不渗透边界时，我们采用有限 Fourier 正弦变换，变换核为  $\sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2} y_D\right)$ 。

$$\frac{\partial^2 \widetilde{P}_D}{\partial x_D^2} - \rho^2 \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 \pi^2 = \frac{\partial \widetilde{P}_D}{\partial t_D} \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial \widetilde{P}_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = -\frac{V_{WD}}{2m-1} \left[ \cos\left(\frac{2m-1}{2} \pi y_{2D}\right) - \cos\left(\frac{2m-1}{2} \pi y_{1D}\right) \right] \quad (23)$$

情形四：顶部为恒压边界底部为不渗透边界时，我们采用有限 Fourier 余弦变换，变换核为

$$\cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2} y_D\right)。$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{P}_D}{\partial x_D^2} + \rho^2 \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 \pi^2 = \frac{\partial \widetilde{P}_D}{\partial t_D} \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \widetilde{P}_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = \frac{V_{WD}}{2m-1} \left[ \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi y_{2D}\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi y_{1D}\right) \right] \quad (25)$$

四种情形下的垂直井筒方向边界条件统一如下：

$$\widetilde{P}_D \Big|_{x_D \rightarrow +\infty} = 0$$

$$\widetilde{P}_D \Big|_{x_D = \frac{a}{rw}} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \widetilde{P}_D}{\partial x_D} \right|_{x_D = \frac{a}{rw}} = 0 \quad (26)$$

(18) - (26) 式为 Fourier 变换后的模型，进一步对该模型中的  $t_D$  进行 Laplace 变换。

Laplace 变换公式：

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Laplace 变换后顶底方向顶底不渗透边界和恒压边界组合的四种情况下的渗流方程和产量条件：

情形一（顶底为恒压边界时）：

$$\frac{d^2 \widetilde{P}_D}{dx_D^2} - [(\rho m \pi)^2 + s] \widetilde{P}_D = 0 \quad (27)$$

$$\left. \frac{d \widetilde{P}_D}{dx_D} \right|_{x_D=1} = -\frac{V_{WD}}{2m\pi} [\cos(m\pi y_{2D}) - \cos(m\pi y_{1D})] \quad (28)$$

情形二（顶底为不渗透边界时）：

$$\frac{d^2 \widetilde{P}_D}{dx_D^2} + [(\rho m \pi)^2 - s] \widetilde{P}_D = 0 \quad (29)$$

$$\left. \frac{d \widetilde{P}_D}{dx_D} \right|_{x_D=1} = \frac{V_{WD}}{2m\pi} [\sin(m\pi y_{2D}) - \sin(m\pi y_{1D})] \quad (30)$$

情形三（底部为恒压边界顶部为不渗透边界时）：

$$\frac{d^2 \widetilde{P}_D}{dx_D^2} - \left[ \rho^2 \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 \pi^2 + s \right] \widetilde{P}_D = 0 \quad (31)$$

$$\left. \frac{d \widetilde{P}_D}{dx_D} \right|_{x_D=1} = -\frac{V_{WD}}{(2m-1)\pi} \left[ \cos\left(\frac{2m-1}{2} \pi y_{2D}\right) - \cos\left(\frac{2m-1}{2} \pi y_{1D}\right) \right] \quad (32)$$

情形四（顶部为恒压边界底部为不渗透边界时）：

$$\frac{d^2 \widetilde{P}_D}{dx_D^2} + \left[ \rho^2 \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 \pi^2 - s \right] \widetilde{P}_D = 0 \quad (33)$$

$$\left. \frac{d\overline{P}_D}{dx_D} \right|_{x_D=1} = \frac{\overline{V}_{WD}}{(2m-1)\pi} \left[ \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{2D}\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{1D}\right) \right] \quad (34)$$

四种情况下的垂直井筒方向边界条件统一如下：

$$\begin{aligned} \left. \overline{P}_D \right|_{x_D \rightarrow +\infty} &= 0 \\ \left. \overline{P}_D \right|_{x_D = \frac{a}{rw}} &= 0 \\ \left. \frac{\partial \overline{P}_D}{\partial x_D} \right|_{x_D = \frac{a}{rw}} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

(27) - (35) 式为二阶常微分方程边值问题，可以用相似构造法求解。为了方便做构造法，我们假设出一个关于  $m, s$  的函数  $f$ ，顶底方向边界条件不同时， $f$  不同。

情形一：顶底为恒压边界时，令

$$f = \sqrt{(\rho m \pi)^2 + s}$$

情形二：顶底为不渗透边界时，令

$$f = \sqrt{s - (\rho m \pi)^2}$$

情形三：底部为恒压边界顶部为不渗透边界时，令

$$f = \sqrt{\rho^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 + s}$$

情形四：顶部为恒压边界底部为不渗透边界时，令

$$f = \sqrt{s - \rho^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2}$$

则方程的两个线性无关的特解为一对指数函数：

$$\overline{P}_{D1} = e^{f x_D} \text{ 和 } \overline{P}_{D2} = e^{-f x_D}$$

构造引解函数

$$\begin{aligned} \varphi_{0,0}(\xi, x_D) &= e^{f(\xi-x_D)} - e^{-f(\xi-x_D)} = 2\sinh[f(\xi-x_D)] \\ \varphi_{1,0}(\xi, x_D) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_{0,0}(\xi, x_D) = 2f \cosh[f(\xi-x_D)] \\ \varphi_{0,1}(\xi, x_D) &= \frac{\partial}{\partial x_D} \varphi_{0,0}(\xi, x_D) = -2f \cosh[f(\xi-x_D)] \\ \varphi_{1,1}(\xi, x_D) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_D} \varphi_{0,0}(\xi, x_D) = -2f^2 \sinh[f(\xi-x_D)] \end{aligned} \quad (36)$$

引解函数为双曲正余弦函数。

构造相似核函数：

$$\Phi(x_D, S) = \frac{G\varphi_{0,0}\left(x_D, \frac{a}{r_w}\right) + H\varphi_{1,0}\left(x_D, \frac{a}{r_w}\right)}{G\varphi_{0,1}\left(1, \frac{a}{r_w}\right) + H\varphi_{1,1}\left(1, \frac{a}{r_w}\right)}$$

对应不同垂直井筒方向边界条件下的相似核函数为  $\Phi(x_D, s)$ ：

$$\Phi(x_D, s) = \begin{cases} -\frac{1}{f} e^{-f(x_D-1)} & \text{当 } x_D \rightarrow \infty \text{ 时} \\ \frac{\sinh\left[f\left(x_D - \frac{a}{r_w}\right)\right]}{f \cosh\left[f\left(1 - \frac{a}{r_w}\right)\right]} & \text{当 } \left.\widetilde{P}_D\right|_{x_D=\frac{a}{r_w}} = 0 \text{ 时} \\ \frac{\cosh\left[f\left(x_D - \frac{a}{r_w}\right)\right]}{f \sinh\left[f\left(1 - \frac{a}{r_w}\right)\right]} & \left.\frac{\partial \widetilde{P}_D}{\partial x_D}\right|_{x_D=\frac{a}{r_w}} = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (37)$$

将得到的相似核函数代入到构造法连分式解中可以得到顶底方向边界条件不同时，四种情形下的解。

情形一：

$$\widetilde{P}_D(x_D, s) = -\frac{\Phi(x_D, s) \bar{V}_{wD}}{2m\pi} [\cos(m\pi y_{2D}) - \cos(m\pi y_{1D})] \quad (38)$$

情形二：

$$\widetilde{P}_D(x_D, s) = \frac{\Phi(x_D, s) \bar{V}_{wD}}{2m\pi} [\sin(m\pi y_{2D}) - \sin(m\pi y_{1D})] \quad (39)$$

情形三：

$$\widetilde{P}_D(x_D, s) = -\frac{\Phi(x_D, s) \bar{V}_{wD}}{(2m-1)\pi} \left[ \cos\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{2D}\right) - \cos\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{1D}\right) \right] \quad (40)$$

情形四：

$$\widetilde{P}_D(x_D, s) = \frac{\Phi(x_D, s) \bar{V}_{wD}}{(2m-1)\pi} \left[ \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{2D}\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{1D}\right) \right] \quad (41)$$

对 (38) - (41) 式依次做 Fourier 正余弦逆变换：

$$\bar{P}_D(x_D, y_D, s) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(x_D, s) \cdot \bar{V}_{wD}}{m\pi} [\cos(m\pi y_{2D}) - \cos(m\pi y_{1D})] \sin(m\pi y_D) \quad (42)$$

$$\bar{P}_D(x_D, y_D, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(x_D, s) \cdot \bar{V}_{wD}}{m\pi} [\sin(m\pi y_{2D}) - \sin(m\pi y_{1D})] \cos(m\pi y_D) \quad (43)$$

$$\bar{P}_D(x_D, y_D, s) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\Phi(x_D, s) \cdot \bar{V}_{wD}}{(2m-1)\pi} \left[ \cos\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{2D}\right) - \cos\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{1D}\right) \right] \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_D\right) \quad (44)$$

$$\bar{P}_D(x_D, y_D, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\Phi(x_D, s) \cdot \bar{V}_{wD}}{(2m-1)\pi} \left[ \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{2D}\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{1D}\right) \right] \cos\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_D\right) \quad (45)$$

若考虑井筒储集和表皮效应：

$$C_D \frac{dP_{wD}}{dt_D} + V_{wD} = 1 \quad (46)$$

$$P_{wD} = P_{wD}^* + S V_{wD}$$

$$P_{wD}^* = \frac{1}{y_{2D} - y_{1D}} \int_{y_{2D}}^{y_{1D}} P_D(x_D, y_D, t_D) dy_D$$

$$(47)$$

其中：

其中， $p_{wD}^*$  为水平井平均压力，具体表示如下：



$$y_{2D} - y_{1D} = \frac{1}{h} [Ly_2 - Ly_1]$$

$$y_{2D} = \frac{Ly_2}{h}, y_{1D} = \frac{Ly_1}{h}$$

对(46)式做 Laplace 变换并根据(46)-(47)式可得 Laplace 空间下  $\overline{V_{wD}}$  和  $\overline{P_{wD}^*}$  的表达式为:

$$\overline{V_{wD}} = \frac{1}{s} - C_D s \overline{P_{wD}^*} \quad (48)$$

情形一:

$$G_m(s) = \frac{h}{2r_w \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(0, s)}{m^2} [\cos(m\pi y_{2D}) - \cos(m\pi y_{1D})]^2$$

情形二:

$$G_m(s) = \frac{h}{2r_w \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(0, s)}{m^2} [\sin(m\pi y_{2D}) - \sin(m\pi y_{1D})]^2$$

情形三:

$$G_m(s) = \frac{h}{r_w \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(0, s)}{(2m-1)^2} \left[ \cos\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{2D}\right) - \cos\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{1D}\right) \right]^2$$

情形四:

$$G_m(s) = \frac{h}{r_w \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(0, s)}{(2m-1)^2} \left[ \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{2D}\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi y_{1D}\right) \right]^2$$

根据(48)-(50)式可得:

$$\overline{P_{wD}} = \frac{1}{s} \frac{1}{C_D s + \frac{1}{G_m + s}} \quad (51)$$

(51)式为考虑井筒储集效应和表皮效应的井底压力的 Laplace 空间解。

#### 4 参数对解的影响分析

在上一节当中,通过相似构造法求得了 Laplace 域下的井底平均压力解。本节利用 Stehfest 数值反演方法将 Laplace 域中的解反演到实空间,并绘制特定边界条件下(垂直井筒方向边界无穷大、顶底边界恒压)的双对数图版,作出压力和压力导数的特征曲线,分析参数团  $C_D e^{2S}$  对特征曲线的影响。

$$\overline{P_{wD}^*} = \int_0^{\infty} e^{-st_D} P_{wD}^* dt_D \quad (49)$$

将(42)-(45)式代入(49)式得到:

$$\overline{P_{wD}^*} = \overline{V_{wD}} \cdot G_m(s) \quad (50)$$

其中,  $G_m(s)$  根据顶底方向的边界条件不同取值也有所不同,分为以下四种情形:

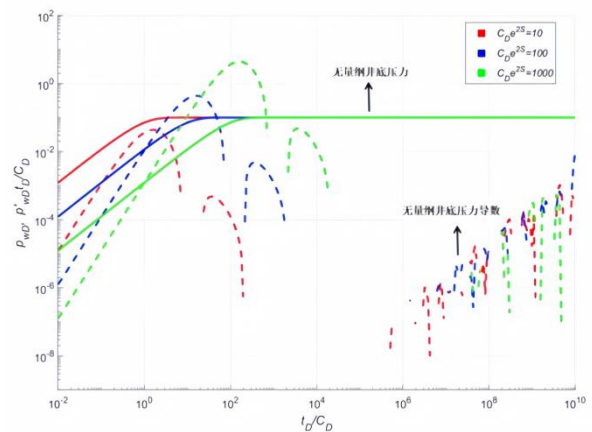


图3 参数团  $C_D e^{2S}$  对无量纲井底压力  $\overline{P_{wD}}$  及其导数的影响

图3可以看出,参数团  $C_D e^{2S}$  对无量纲压力曲线的影响主要产生在早期流动阶段,随着  $C_D e^{2S}$  值的增大,曲线趋于平稳的时间越晚。导数曲线出现峰值后,压力曲线变得平缓,而晚期压力动态与不考虑井筒储存时水

平井晚期压力动态相同,与理论分析完全吻合。

由于本文研究模型为二维水平井,变量的减少导致无量纲井底压力导数曲线在流动后期出现震荡。但仍可以观察到, $C_D e^{2S}$ 越大,压力导数曲线的峰值越高且峰值出现的时间越迟。

## 5 结论与认识

(1) 本文首次将构造法理论运用到二维水平井中,利用 Fourier 变换、Laplace 变换得到了在四种顶底边界条件下,考虑井筒储集和表皮因子下的压力 Laplace 域下的精确解,拓宽了相似构造法的应用范围,为水平井模型的求解提供了新思路。

(2) 得到了四种顶底边界条件下压力的统一连分式,相比于直井的连分式解式,发现解式形式相同,而核函数并不相同。可以看出,全新的核函数  $G$  包含了  $\Phi$  这个相似核函数,且不同的顶底边界条件对应不同的  $G$ 。这个统一的连分式表达式对于编制试井分析软件,可以起到事半功倍的效果。

(3) 从井底压力统一连分式解的相似结构中,能够容易地分析出井筒储集系数、表皮因子等对井底压力解的影响。

## 参考文献

[1] Goode P A, Thambynayagam R K M. Pressure drawdown and buildup analysis of horizontal wells in anisotropic media[J]. SPE Formation Evaluation, 1987, 2(4): 683 - 697.

[2] Ozkan E, Raghavan R. New solutions for well-test analysis problems: Part 1—analytical considerations[J]. SPE Formation Evaluation, 1991, 6(3): 359 - 368.

[3] Ozkan E, Raghavan R. New solutions for well-test analysis problems: part 2—computational considerations and applications[J]. SPE Formation Evaluation, 1991, 6(3): 369 - 378.

[4] 李晓平, 赵必荣, 凌代模. 考虑井筒储存和表皮效应的均质各向异性油(气)藏水平井的压力动态[J]. 天然气工业, 1994(06).

[5] 姜瑞忠, 张福蕾, 杨明, 等. 双重介质低渗透油藏水平井试井模型[J]. 特种油气藏, 2019, 26(03): 79-84.

[6] 吴明录, 李涛, 赵高龙, 等. 双重孔隙介质三区复合油藏水平井试井模型[J]. 油气井测试, 2022, 31(04): 6-12.

[7] 陈子春, 刘鹏惠, 李顺初. 复合型 Bessel 方程组定解问题解的相似结构[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2006, 23(1): 1-4(-24).

[8] 刘鹏惠, 陈子春, 李顺初. 复合变型 Bessel 方程组定解问题解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2006, 25(2): 23-26.

[9] 徐昌学, 李顺初, 朱维兵. 分形复合油藏试井分析解的相似结构[J]. 钻采工艺, 2006, 29(5): 39-42.

[10] 郑鹏社, 李顺初, 徐文昭. 基于解的相似结构的复合油藏试井分析方法[J]. 钻采工艺, 2007, 30(3): 49-50(-62).

[11] 李顺初, 郑鹏社, 张宇飞. 复合油藏试井分析解的相似结构[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(3): 23-28.

[12] 郑鹏社, 李顺初, 朱维兵. 复合双孔介质油藏中压力分布的相似结构[J]. 钻采工艺, 2008, 31(4): 80-81.

[13] 李全勇, 李顺初, 李伟等. 基于解相似结构的复合油藏渗流模型研究[J]. 断块油气田, 2011, 18(5): 623-625.

[14] 李全勇, 李顺初, 李科等. 基于相似结构的双孔复合油藏的渗流模型研究[J]. 钻采工艺, 2012, 35(2): 54-56.

[15] 王俊超, 李顺初, 许丽. 基于解的相似结构的复合油藏球向渗流模型[J]. 桂林理工大学学报, 2012, 32(4): 624-627.

[16] Cui-Cui Sheng, Jin-Zhou Zhao, Yong-Ming Li, Shun-Chu Li and Hu Jia. Similar Construction Method of Solution for Solving the Mathematical Model of Fractal Reservoir with Spherical Flow. 2013.

[17] Li Xu, Xiangjun Liu, Lixi Liang, Shunchu Li\*, and Longtao Zhou. The Similar Structure Method for Solving the Model of Fractal Dual-Porosity Reservoir [J]. Mathematical Problems in Engineering, Volume 2013, Article ID 954106, 9 pages.

[18] 张红丽. 弹性外边界下均质球向流油藏问题解的相似结构[D]. 西华大学, 2020.