

# 关于云南红河梯田的数学建模与实证分析

胡澍楷

北京四中国际校区高二年级，北京市西城区，100031；

**摘要：**本文通过对云南红河县一处梯田的数学建模、测量和分析，取得以下成果：根据现有的梯田，使用 Kriging 插值法，进行曲面建模，展示出曲面建模和计算的应用，模拟出梯田改造前的山坡形态；证明经纬度坐标系与球面坐标系转换，曲面梯度和曲面面积的计算；定义梯田的土地利用率这一变量，利用梯度计算，证明梯田土地利用率与山体梯度的关系具有相关性；与梯田的实际情况相联系，证明山体坡度越大，土地利用率越小，给出政府相关文件的科学依据，证明适合建造梯田的梯度不宜过高。在未来，如果可以在计算利用率时考虑到田垄宽度的影响，在水土流失和经济收益方面做出详细的建模，应可以更好的支持此结论。

**关键词：**Kriging 插值法；曲面建模；土地利用率；曲面面积；梯度

**DOI：**10.69979/3041-0673.25.09.068

## 引言

水稻是我国的重要作物且主要被种植于中国南方地区，因南方众多地区地势不平坦，人们会在丘陵坡地上沿等高线修建带状或波浪形田地，这就是梯田。云南红河州哈尼族人民建造出的梯田尤为出名。每次回云南，我都会被梯田的壮观所吸引，这也让我想到如下几个问题：在修建梯田之前，修建梯田的山坡是何样子？为什么在此处修建梯田，这个地方有何好处？国家关于梯田开垦的土地管理规定是什么？虽然许多梯田历史悠久，但是是否符合国家现行的管理规定，或者说这样的梯田还能否被修建？梯田修建之后，梯田的利用率是多少，这个利用率和地表的坡度是否有关？本文通过理论研究及现场采集小面积梯田的数据，进行建模分析，成功解决这些问题（疑问）。

## 1 三维曲面的相关计算

### 1.1 经纬度坐标系与球面距离的转换

根据经纬度的定义，将地球假定为一个完美的球体，从而发现：在不同的纬度，经度变化相同的量时，距离变化的量是不同的；相反，在不同的经度，不论纬度如何变化，距离变化的量是相同的。因此，为计算经纬度每变化一秒后距离的变化量，现在推导出以下公式：

设地球半径为  $R$ ，纬度为  $\theta$ ，设某一条纬线（纬度在球面上画的圆）的半径为  $r$ 。设纬度是该圆上一点与球心连线与垂直投影在赤道所围圆上的线段之间的夹角，可以发现  $r$  的长度等于这条投影线段的长度，或者换句

话说：

$$r = R \cos \theta$$

对于球面上任意纬度处（包括赤道，即  $\theta = 0$ ）的圆，都满足圆周率公式：

$$C = 2 \pi r$$

由于  $2 \pi$  是常数，显然，下列等式也成立：

$$C = C_{eq} \cos \theta$$

注： $C_{eq}$  表示地球赤道周长。根据这个公式可以求出每条纬线（每个纬度所围成的圆）的周长。由于任何纬度都有 360 度，也就是  $360 \times 60 \times 60$  秒，我们只需要用  $C$  除以这个数，就可以求出该纬度每增加一秒经度，距离会增加多少米。

至于经度，考虑到上面提到的经度不同并不影响纬度变化与距离变化的关系，这也表示为纬度每增加一秒，距离总是增加相同的量。如果定义经度增加的秒数为  $\Delta s_{lo}$ ，纬度增加的秒数为  $\Delta s_{la}$ ，距离变化为  $\Delta l_x$  和  $\Delta l_y$ 。上述经度和纬度的计算可以整合成以下公式：

对于完美球体上的相同纬度：

$$\Delta l_x = \Delta s_{lo} \frac{2\pi R \cos \theta}{360 \times 60 \times 60}$$

对于完美球体上的相同经度：

$$\Delta l_y = \Delta s_{la} \frac{2\pi R}{360 \times 60 \times 60}$$

注： $\Delta l_x$  和  $\Delta l_y$  的单位是 km，而非 m，本研究中，后续建模均以 m 为单位，也就是说  $\Delta l_x$  和  $\Delta l_y$  需要除以 1000。另，本研究中地球半径取  $R = 6371$  km。

### 1.2 曲面的梯度

根据标量场关于向量的导数的定义:

$$f'(a; y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hy) - f(a)}{h}$$

因为可导标量场的定义是如果存在以下线性变换:

$$Ta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

由此可见方向导数就是梯度向量的  $y$  方向分量。容易看出, 当  $\cos \theta = 1$  时,  $\|\nabla f(a)\| \cos \theta$  达到最大值, 也就是  $y$  与  $\nabla f(a)$  方向一致。这意味着在给定点  $a$  处, 标量场在梯度向量方向上的变化率最大, 也等于梯度向量的长度。

此外, 考虑等值线的定义: 对于一个函数  $z = f(x, y)$ , 该函数也可以看作一个曲面, 用平面  $z = c$  截取曲面  $z = f(x, y)$  得到的曲线方程在  $xOy$  上的投影称为函数  $z = f(x, y)$  的等值线, 因为:

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$$

还有一个标量函数  $E(a, v)$ , 满足:

$$f(a + v) = f(a) + Ta(v) + \|v\| E(a, v)$$

$Ta$  称为  $f$  在  $a$  处的全导数, 其中  $\|v\| < r$ , 当  $\|v\| \rightarrow 0$  时,  $E(a, v) \rightarrow 0$ 。

当  $f$  在  $a$  处可导, 且全导数为  $Ta$ 。则对于  $\mathbb{R}^n$  中的每个  $y$ , 导数  $f'(a; y)$  都存在, 且:

$$Ta(y) = f'(a; y)$$

$f'(a; y)$  是  $y$  分量的线性组合, 同时如果  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , 则:

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^n D_k f(a) y_k$$

它也可以写成内积:

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^n D_k f(a) y_k = \nabla f(a) \cdot y$$

$\nabla f(a)$  称为  $f$  的梯度, 即以  $f$  在  $a$  处的偏导数为分量的向量。

当  $y$  为单位向量时, 方向导数  $f'(a; y)$  与梯度向量具有简单的几何关系。假设  $\nabla f(a) \neq 0$ , 令  $\theta$  为  $y$  和  $\nabla f(a)$  之间的角度。然后:

$$\begin{aligned} f'(a; y) &= \nabla f(a) \cdot y = \|\nabla f(a)\| \|y\| \cos \theta \\ \cos \theta &= \|\nabla f(a)\| \cos \theta \end{aligned}$$

由此可见方向导数就是梯度向量的  $y$  方向分量。容易看出, 当  $\cos \theta = 1$  时,  $\|\nabla f(a)\| \cos \theta$  达到最大值,

也就是  $y$  与  $\nabla f(a)$  方向一致。这意味着在给定点  $a$  处, 标量场在梯度向量方向上的变化率最大, 也等于梯度向量的长度。

此外, 考虑等值线的定义: 对于一个函数  $z = f(x, y)$ , 该函数也可以看作一个曲面, 用平面  $z = c$  截取曲面  $z = f(x, y)$  得到的曲线方程在  $xOy$  上的投影称为函数  $z = f(x, y)$  的等值线, 因为:

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$$

可发现  $xOy$  中的等值线函数:

$$f(x, y) = c$$

若  $f_x$  与  $f_y$  不同时为零, 则等值线  $f(x, y) = c$  上任意一点  $P_0(x_0, y_0)$  处的单位法向量  $n$  为:

$$\begin{aligned} n &= \frac{(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))}{\sqrt{f_x^2(x_0, y_0) + f_y^2(x_0, y_0)}} \\ &= \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|} \end{aligned}$$

这意味着函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的梯度为  $\nabla f(x_0, y_0)$ , 其方向就是该点的等值线的法线方向  $n$ , 而梯度的模长就是朝着这个法线方向  $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$  的方向导数。因此:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial n} n$$

当函数为  $f(x, y, z)$  且具有等值面  $f(x, y, z) = c$  时, 并且当  $n$  仍然是等值面上任意一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的法向量时, 上述内容也可成立, 也就是如下等式成立:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial n} n$$

### 1.3 曲面面积计算

考虑区域  $R$  上的曲面  $z = f(x, y)$ , 由于  $z$  可能是曲面, 使用微积分来解决问题可能是一种正确的方法, 也就是说, 曲面表面积可以通过二重积分计算。即先进行近似, 然后使用极限将近似值细化为精确值。选择曲面上而下的投影上的一个微小变化量, 即一小片面积, 并将该面积的长度和宽度定义为  $\Delta x_i$  和  $\Delta y_i$ 。将由  $\Delta x_i$  和  $\Delta y_i$  在投影上组成的曲面上对应位置的切平面区域的长度和宽度定义为  $u$  和  $v$ 。

由于  $\Delta x_i$  和  $\Delta y_i$  非常小, 因此由  $u$  和  $v$  形成的图形是一个极小的平行四边形, 与原始表面无异。

由于平行四边形的面积为：

$$A = bh$$

其中， $b$  是其中一条边的长度， $h$  是该边的高度，如果将平行四边形的一对相邻边定义为向量  $u$  和  $v$ ，并且长度为  $b$  的边的长度定义为  $v$ ，则根据三角几何：

$$h = \|u\| \sin \theta$$

然后根据向量外积的定义，求平行四边形的面积：

$$A = bh = \|v\| \|u\| \sin \theta = \|u \times v\|$$

当  $z = f(x, y)$  是包含  $(x_0, y_0)$  的开集  $S$  上的可导曲面时，在  $(x_0, y_0)$  处沿  $x$  方向与  $f$  相切的切线是经过  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  并平行于  $1, 0, f_x(x_0, y_0)$  的直线  $l_x$ ；在  $(x_0, y_0)$  处沿  $y$  方向与  $f$  相切的切线是经过  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  并平行于  $0, 1, f_y(x_0, y_0)$  的直线  $l_y$ 。

值得注意的是， $u$  在  $x$  方向上与表面相切，而  $v$  在  $y$  方向上与表面相切， $u$  平行于  $1, 0, f_x(x_0, y_0)$ ，而  $v$  平行于  $0, 1, f_y(x_0, y_0)$ 。 $u$  的  $x$  方向位移为  $\Delta x_i$ ，而  $v$  的  $y$  方向位移为  $\Delta y_i$ ， $u = \Delta x_i 1, 0, f_x(x_0, y_0)$ ， $v = \Delta y_i 0, 1, f_y(x_0, y_0)$ 。因此，表面极小部分的表面积约等于切面的表面积，等于：

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\| &= \|\Delta x_i \langle 1, 0, f_x(x_0, y_0) \rangle \times \Delta y_i \langle 0, 1, f_y(x_0, y_0) \rangle\| \\ &= \sqrt{1 + f_x(x_i, y_i)^2 + f_y(x_i, y_i)^2} \Delta x_i \Delta y_i \end{aligned}$$

设由  $\Delta x_i \Delta y_i = \Delta A_i$  组成的面积，所有  $\Delta A_i$  的总和就是  $R$  的表面积：

$$S \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f_x(x_i, y_i)^2 + f_y(x_i, y_i)^2} \Delta A_i$$

取  $\Delta x_i$  和  $\Delta y_i$  的极限均趋近于 0，令  $z = f(x, y)$ ，其中  $f_x$  和  $f_y$  在封闭的有界区域  $R$  上连续，则  $R$  上的表面积  $S$ ：

$$\begin{aligned} S &= \iint_R dS \\ &= \iint_R \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dA \end{aligned}$$

## 1.4 梯田土地利用率定义

通过上述方法可以计算出连续表面的表面积，例如计算山体表面的表面积。为更好地分析梯田的土地利用

率，需要定义梯田的最大利用率。按照常识，田地的利用率一般可以定义为利用的土地占土地总面积的比值。因此，如果定义表面覆盖的投影面积为  $S_p$ ，则计算梯田最大利用率  $UR$  的公式可以定义如下：

$$\begin{aligned} UR &= \frac{S_p}{S} \\ &= \frac{\iint_R dA}{\iint_R \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dA} \end{aligned}$$

## 2 使用的三维拟合方法：Kriging 法

Kriging 插值是一种统计技术，主要用于地质统计学，根据观测数据预测未采样位置的未知值。Kriging 是一种插值方法，它使用由先验协方差控制的高斯过程，通过最小化预测误差的方差，为未观测位置提供最佳的线性无偏预测。

Kriging 使用变异函数通过测量数据方差随距离的变化来量化空间相关性，从而了解数据的空间结构并确定分配给附近观测点的权重。距离较近且相关性较高的点获得较高的权重。

利用变异函数模型计算出的权重，可以通过计算点附近测量数据点的线性组合乘以权重来获得某个点的数据值。

$$Z(x_0) = \sum_{i=1}^n w_i Z(x_i)$$

本文采用普通 Kriging 法，该法假设研究区域内的未知均值为常数。

## 3 相关性计算理论、方法与背景信息

### 3.1 关于数据相关性的计算

相关系数可以计算出两个变量之间线性关系的强度和方向，最常见的方法是皮尔逊相关系数，计算如下：

$$\begin{aligned} r(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]} \\ &= \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2][n \sum y^2 - (\sum y)^2]}} \end{aligned}$$

在式子中，如果  $r > 0$  表示  $X$  与  $Y$  正相关，如果  $r < 0$ ，则负相关。同时， $r$  的绝对值越大（越接近 1）表示关系越强，而值接近或等于 0 表示弱或无线性关系，这是理解数据关系的一个基本统计数据。

上面的式子中， $\text{Cov}$  表示协方差，衡量两个变量共同变化的程度，表示一个变量的增加是否对应于另一个变

量的增加或减少。

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$$

其中  $\mu_X$  和  $\mu_Y$  分别是变量 X 和 Y 的均值。

Var 方差也是与数据分布和关系相关的统计指标，可以衡量单个变量的值与其平均值之间的差异。它表示数据点的分布。

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu)^2$$

其中  $\mu$  是变量 X 的平均值，n 是观测值的数量。

注：事实上，前文提到的 Kriging 插值法中，也运用众多类似且更复杂的统计量从而计算出每一个周围数据点的权重。

### 3.2 相关法律

根据《中华人民共和国水土保持法》第二十条禁止在二十五度以上陡坡地开垦种植农作物。在二十五度以上陡坡地种植经济林的，应当科学选择树种，合理确定规模，采取水土保持措施，防止造成水土流失。省、自治区、直辖市根据本行政区域的实际情况，可以规定小于二十五度的禁止开垦坡度。禁止开垦的陡坡地的范围由当地县级人民政府划定并公告。事实上，我国对于适合修建梯田的山体的坡度（也就是梯度）是有明确规定了。

## 4 建模与分析

### 4.1 数据收集

由于免费的 DEM (Digital Elevation Model, 数字高程模型) 数据最大精度只有 30m, DEM 数据根本不能满足研究需要。因此，实地测量一片梯田的数据，再进行建模是一个更好的选择。在观察 Google Earth 上的卫星图像并调查实际情况后，我决定前往云南省红河州撒玛坝进行梯田测量，获取第一手数据。撒玛坝梯田面

积极大，为测量的小区域提供更多的选择。通过分析 Google Earth 卫星地图提供的海拔、经纬度、道路等信息，出发前选定三个小区域实地测量的考虑范畴。2024 年 7 月实际测量中，有两块梯田不方便测量（一块交通不便；一块人员流动干扰大），最终选择龙玛村如下的梯田：



Figure 1: 最终选择的小片梯田

拟合三维曲面需要测量三维曲面上众多数据点的三维坐标。对于山地，直接在山地表面测量经纬度和海拔是一种获取三维数据点的简便方法。

为防止记录梯田中每个坐标点的具体位置出错，我先用小红旗作为标记插在田垄上记录测量点，以便日后利用软件进行可视化打下基础。

在现场测量时，先用相对准确的手机和 GPS 定位器对同一海拔的十三个坐标点进行两次测量，发现两次测量在同一海拔的十三个点的高程误差在  $\pm 5m$  以上。鉴于这种情况，最终选择用手机和 GPS 定位器测量经纬度，高度完全用卷尺测量。假设每一条田垄的高度基本一致，选取最低的一层梯田田垄为基准点，将不同相对高度的田垄与基准点的高度差测量出来，并逐层递加，计算出每一个数据点的相对高度。

在这次实地测量中，共测量 162 个数据点，每个数据点包括 5 个数据项，即用手机和 GPS 定位器测量的经纬度秒数，以及用尺子测量的相对于基准最低点的相对高度。

data point	sec of lo(l)	sec of la(l)	sec of lo(p)	sec of la(p)	relative height
1	54.67	56.64	60.120497	47.43704	0
2	54.11	56.96	59.658074	47.7357	0
3	53.99	57.19	59.556372	47.912944	0
.	.	.	.	.	.
162	53.3	55.55	58.824953	46.339209	9.62

注：本表中 l 表示 GPS 定位器测量，p 表示手机测量，lo 表示经度，la 表示纬度，sec 表示该点经度或纬度的秒数，大于 60 的秒数是因为这些数据都被转换为  $102^{\circ} 21' E$  和  $23^{\circ} 15' N$ ，经度大于  $21'$  或纬度大于  $15'$  的数据点在上表中记为  $60 + sec$ 。

在选取测量数据点时，遵循以下原则，以更好地贴合山体结构。

- (1) 测量数据点尽量沿着每条田垄进行测量；
- (2) 必须测量田垄的起止点；
- (3) 必须测量田垄的拐角；
- (4) 如果田垄基本为直线，则必须在不大于 10 米的范围内进行点位测量；
- (5) 测量前应在点位处放置红旗作标记，避免测量值与点号混淆；
- (6) 用手机和 GPS 定位器测量两组数据进行比对验证；
- (7) 每次田垄高度变化时，测量两个高度之间的相对高度。

## 4.2 数据处理

### 4.2.1 建模前的数据转换

值得注意的是，经度和纬度的单位是度，而相对高度的单位是米。因此，在建模时，为显示地表的真实情况，需要将以度表示的经度和纬度值转换为米。

通过上文中提供的转换方法，成功计算出在相同的经度下，纬度每增加一秒，距离将增加 30.88747962m。对于相同的纬度，考虑到建模区域的纬度实际上是变化

的，经度每增加一秒，纬度都会影响距离增加量，但同时由于测量面积较小，可以计算出经度每增加一秒，平均增加量为 28.3757636m，虽然纬度发生变化，但变化误差的最大值与平均值之差为  $1.02418 \times 10^{-4}$ m，基本可以忽略不计。

由于测量面积较小，所以先将所有经度从最小经度中减去，将所有纬度从最小纬度中减去，再绘制图形。此操作将表面平移到更靠近远点的位置，使计算更加容易。

### 4.2.2 梯田形状的可视化和错误数据点的修正

在数据处理中，可以发现手机测得的数据存在较多的测量误差，只能作为辅助判断。将 GPS 定位器测得的 162 个坐标点的经纬度通过以下公式由度分秒表示法转换为度的十进制表示法：

经度信息定义为 x 坐标，纬度信息定义为 y 坐标。将所有经纬度数据导入 CAD (Computer-aided design, 计算机辅助设计) 软件，根据手机测量结果以及测量时梯田内数据点的实际位置关系，发现 162 个测点中有 5 个测点数据存在异常。通过对原始数据的对比分析，进行修正（纬度不变，经度变为纬度所在直线与连两点直线的交点，或经度不变，纬度变为经度所在直线与连两点直线的交点），最终形成梯田的 CAD 平面图。

Table 1: 5 个测量点数据异常及纠正措施

Data Point	Sec of Lo (l)	Sec of La (l)	Deg of Lo (n)	Deg of La (n)
25	53.68	58.01	102.36462778°	23.26611389°
110	52.18	58.81	102.36449444°	23.2657625°
114	52.92	58.29	102.3647°	23.26565643°
126	51.6	56.87	102.36441923°	23.26579722°
141	53.15	55.6	102.36460708°	23.26552265°

注：表中 lo 为经度，la 为纬度，sec 为该点经度或纬度的秒数，l 表示矫正前 GPS 定位器的测量数据，deg 为校正后数据点位置的十进制度数，n 表示校正后。另外，之所以选择这种校正方式，是因为五个坐标并不在梯田的边缘，也就是说它们与每个坐标点相邻的两个点的关系接近共线。

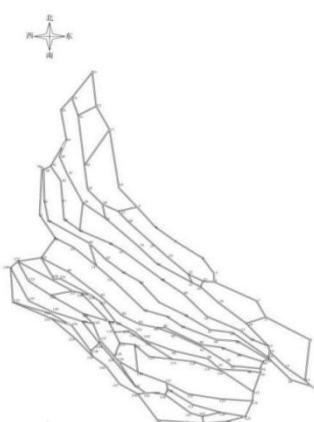


Figure 2: 梯田的二维可视化 (CAD)

梯田实际平面图形成后，将平面图导入 SKETCH 软件，根据各数据点的相对高程信息，将二维平面图转化为三维地形图。通过以上过程，162 个经纬度、海拔的地形实际数据已完全转化为电子三维文件。梯田的可视化已完成。

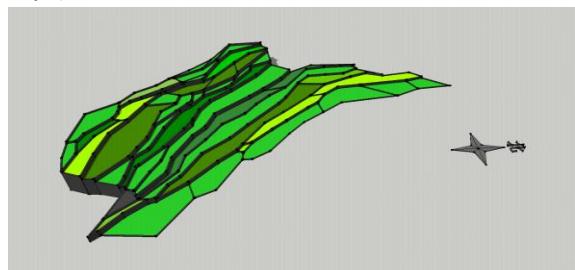


Figure 3: 梯田的可视化

#### 4.2.3 数据点可视化

为保证所有用于拟合的数据都接近真实值, 在正式拟合和后续拟合的坐标点可视化中直接删除 5 个错误的数据点, 剩下 157 个数据点用于拟合。

正式拟合时, 选择使用 Python 代码编程以方便数据处理和计算机计算。在三维空间中, 将每个数据点绘制并连接成由多个平面组成的空间图形, 基本可显示所有数据点的位置和山体形状。

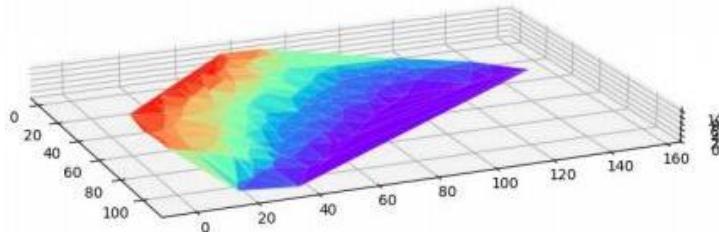


Figure 4: 数据点可视化

#### 4.2.4 Kriging 拟合

继续使用 Python 代码编程利用 Kriging 方法完成拟合, 并绘制拟合曲面。

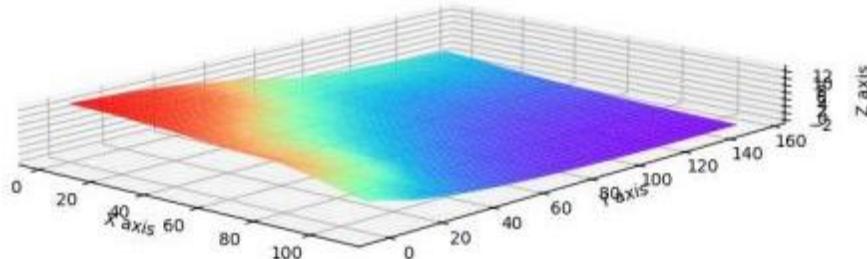


Figure 5: Kriging 拟合

### 4.3 梯度与土地利用率的关系

使用 Python 代码将具有矩形投影面积的拟合曲面划分为 400 个投影面积相等的小块。通过程序计算每个

小块中心点的梯度, 即整个拟合曲面的离散梯度, 以及每个小块的表面积和投影面积, 这些都可以使用上面的公式计算出来, 最后计算出利用率 UR。

计算出的数据如下:

Table 2: 梯度, 曲面面积, 投影面积与利用率

patch	$\nabla f(x, y)$	S	$S_p$	$\frac{S_p}{S}$
1	(-0.0397, -0.0102)	42.2486	42.2136	0.9992
2	(-0.0406, -0.0142)	42.2521	42.2136	0.9991
3	(-0.0427, -0.0190)	42.2521	42.2136	0.9989
.	.	.	.	.
400	(0.0003, -0.0119)	42.2166	42.2136	0.9999

甚至可以绘制出这个曲面的梯度的向量场:

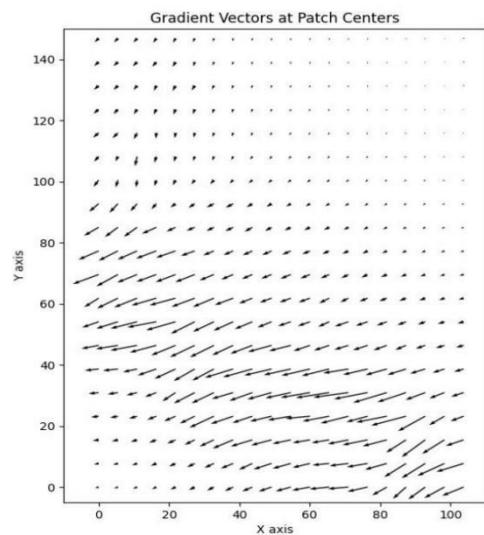


Figure 6: 梯度向量场

或者是 UR 的标量场:

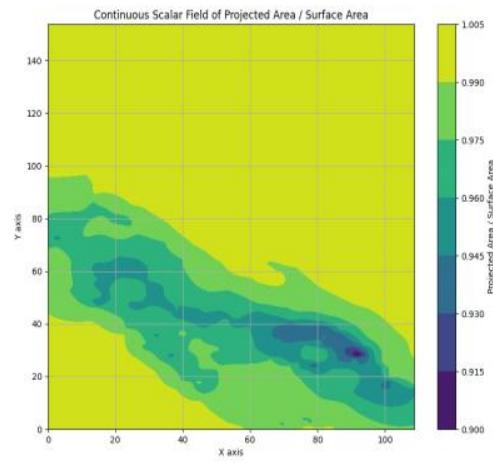


Figure 7: UR 标量场

根据以上数据, 还可以绘制出梯度与利用率 UR 的关系图。

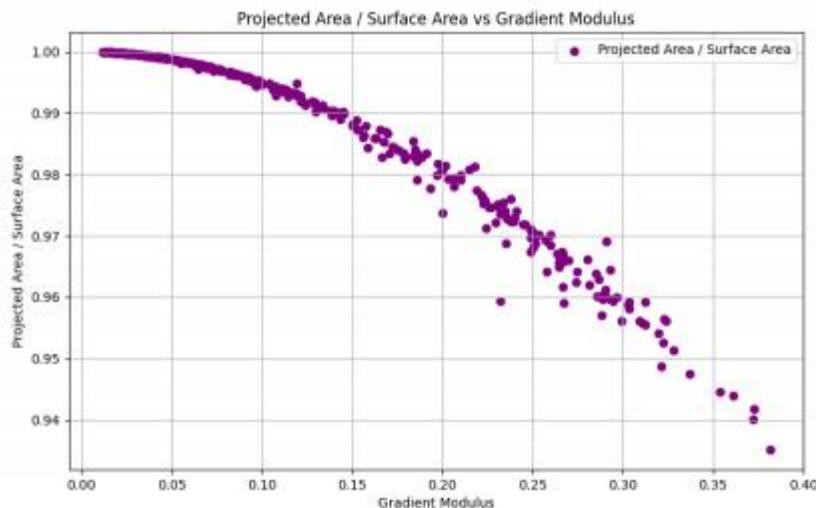


Figure 8: 梯度与 UR 关系图

对梯田各个小部分的理论最大利用率进行计算, 也可以发现这样的关系: 坡度越大, 梯田的利用率越低。

如果进行更多的计算, 可以发现:

$$\begin{aligned} UR &= \frac{\iint_R dA}{\iint_R \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dA} \\ &= \frac{\iint_R dA}{\iint_R \sqrt{1 + (\nabla f(x, y))^2} dA} \end{aligned}$$

如果我们考虑梯田上表面的每一个点, 可以计算出梯田的理想利用率:

$$\begin{aligned} UR_p &= \frac{dA}{\sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dA} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla f(x, y))^2}} \end{aligned}$$

通过实测数据计算出梯田的理想利用率:

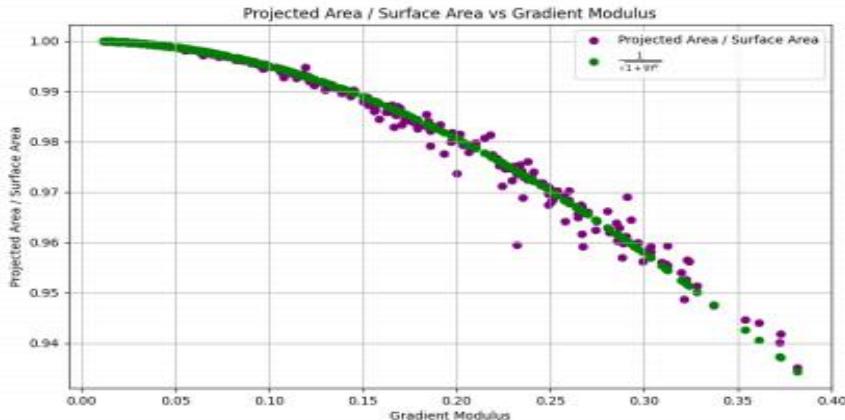


Figure 9: 梯度,  $\frac{1}{\sqrt{1+(\nabla f(x,y))^2}}$  与  $UR$  的关系图

在这个计算过程中, 理想利用率  $\sqrt{1+(\nabla f(x,y))^2}$  与真实利用率  $UR$  的相关性可以通过前文提供的相关系数判断, 使用 Python 编程可以计算出这两个数据的相关系数为: 0.99472733, 也就是说这两个数据具有极强的相关性, 即成功证明梯田的梯度与梯田的利用率有关。

## 5 结论

(1) 本文通过实地测量的方式获得第一手梯田数据, 这些数据包括经度、纬度和相对高度, 利用 Kriging 插值法对山体进行了曲面建模, 成功拟合出梯田建设前的山体的样貌, 这样就成功完成利用少量的采样数据拟合出与原本的山坡形态的过程;

(2) 定义梯田的土地利用率这一关键的变量, 并利用曲面梯度的计算公式, 研究土地利用率与山体梯度之间的关系, 用实证分析的办法, 给出利用率与梯度之间的相关性, 相关系数达到 0.99472733, 而通过对山体的分析可以发现, 该位置的梯田理论最大利用率较高;

(3) 通过研究表明, 山体的梯度越大, 理论利用率和实际利用率应当都有所下降, 这成功侧面证明《中华人民共和国水土保持法》这一国家法律法规的科学依据, 同时, 虽然该地区的山体的坡度符合建设梯田的国家规定, 但考虑到测量数据的具体情况, 仍然能表明山体梯度在大于一定值时确实利用率较低, 不适合建设梯田, 证明适合建造梯田的梯度不宜过高;

(4) 在该地区也有一些位置, 在符合规定的同时, 梯度仍然较大, 也就是说那部分田地的利用率较低, 发生水土流失的概率也可能比较高, 从生态环境保护和经济利益的角度来讲, 在当地如果能规划好田垄尽量提高

土地利用率, 以及在未来如果开垦梯田尽量开垦梯度较缓的地区, 将梯度较高的地区退耕还林, 或者努力保护已有的梯田地区或该地区附近的植被, 减少水土流失的影响, 或许可以更好的可持续发展。

## 6 展望

本次实证分析基本达到预期效果, 但未来还有可深入研究的方向。

(1) 未来可使用遥感、航拍技术测量, 土地测量效率也更高, 土地利用率数据更准确;

(2) 如果考虑田垄在山体投影面积上的占比, 梯田的土地利用率会降低。观察发现, 坡度越大, 田垄越密。通过研究田垄的修建成本和带来的经济效益, 并考虑水土流失风险, 可以做出更准确的建模, 判断什么样的山体更适合修建梯田;

(3) 梯田建设可增加耕地, 但也存在建设、维护成本与收益之间的经济性关系。本文利用数学方法, 初步揭示了为什么在梯度较小的地方适合建设梯田, 但没有给出梯田建设和维护成本与收益之间的关系, 如果能探索出该关系, 可以为当地的经济发展提供进一步的帮助;

(3) 本文未涉及梯田对于水土保持的生态环境保护研究, 未来探索梯田与环境保护之间的关系也是一个价值的研究课题。

## 参考文献

- [1] Tom M. Apostol. CALCULUS II Second Edition  
[M]. New York Chichester Brisbane Toronto Singa

- pore: Wiley, 1969.
- [2] Gregory Hartman, Ph. D. APEX CALCULUS version 4. 0 [M]. Grand Forks, ND: Apex Calculus, LLC., 2018
- [3] Georges Matheron. *Traité de géostatistique appliquée* [M]. France: Editions Technip, 1962 - 63.
- [4] 中国科学院地理科学与资源研究所. 全国 DEM 1km、500m 和 250m 数据 (SRTM 90m)
- [5] Vladimir A. Zorich. *Mathematical Analysis II* Second Edition [M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2004.
- [6] 同济大学数学系. *高等数学 (第七版)* [M], 2014

作者简介: 胡澍楷(2008.01-), 男, 汉族, 云南省石屏县人, 学历高中, 2024 年入选中学生英才计划, 未来规划从事数学、物理相关学科研究。