

# 挖掘数学精神 精化概念教学——以“倾斜角与斜率” 教学为例

付凝睿<sup>1</sup> 严卿<sup>2</sup>

1 湖北大学, 湖北武汉 430000;

2 湖北大学师范学院, 湖北武汉 430000;

**摘要:** 将培养拔尖创新人才的战略任务落实到中学数学教育上, 实则就是要培养学生的数学研究精神. 本文以“倾斜角与斜率”为例, 挖掘其中所蕴含的数学研究精神, 主要包括: “思想简洁化精神”、“扩张化、一般化精神”和“严密化精神”, 并以数学精神为导航, 完成“倾斜角与斜率”的教学设计.

**关键词:** 数学研究精神; 倾斜角与斜率; 教学设计

**DOI:** 10. 69979/3029-2735. 25. 07. 087

如今, 拔尖创新人才培养是提升国家综合国力, 实施科教强国战略、人才强国战略, 加快推进教育现代化、建设教育强国的关键. 中共中央、国务院颁布的《中国教育现代化 2035》部署了“提升一流人才培养与创新能力”的战略任务<sup>[1]</sup>, 强调了新时代培养拔尖创新人才的必要性与重要性.

拔尖创新人才培养是一个递进化的过程, 应是从基础教育到高等教育循序渐进、长期积累的过程, 绝非一朝一夕可以实现. 尽管高等教育是将拔尖创新人才培养从理论转向实践的重要场所, 但基础教育更是激发学生创造兴趣、发展学生创新能力和素养的基础性阵地, 对夯实拔尖创新人才成长基础具有重要作用. 这启示各中学教师在教育实践中应该有意识地激发学生的创造性思维、发展学生的创新能力, 具体应表现在多采用启发式教学、鼓励学生勤思考、多实践, 培养学生的科学家精神. 对于数学学科而言, 实则就是培养学生的数学研究精神, 让学生在此过程中提升对数学的兴趣, 找到“发现”之美.

数学研究的精神, 其实就是一种在数学研究中潜移默化塑造、锤炼得到的, 并可以推广、运用到其他活动中的、灵活性较强的精神, 它包括扩张化、一般化精神, 研究、发现精神, 应用化精神, 思想简洁化精神, 组织化、系统化精神、统一建设精神和严密化精神. 《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中所提出的核心素养是针对普遍学生的基本标准, 而数学研究的精神是针对培养拔尖创新人才的更高标准, 两者是从

低到高的递进关系.

## 1 倾斜角与斜率的数学研究精神分析

直线的倾斜角与斜率是中学阶段平面解析几何部分的第一个内容, 是用代数方法研究几何图形的典型内容. 要用坐标表示直线, 首先应该将问题化简成用“数”表示直线的几何要素, 因此, 该节下的小节内容“倾斜角与斜率”的重点在于挖掘直线几何要素的代数刻画.

首先思考一条直线的几何要素——一个点和一个方向, 接着逐步探究刻画直线方向的工具, 从“形”的倾斜角到“数”的斜率, 数形结合, 实现从“形”到“数”的飞跃. 基于此设计思路, 分析本教学设计中所蕴含的数学研究精神, 主要包括:

### 1.1 思想简洁化精神

倾斜角和斜率的定义均简化、方便了研究过程.

### 1.2 扩张化、一般化精神

从“用坐标表示点”进一步到“用坐标表示直线”, 以及在探究倾斜角与直线上两点坐标的关系时, 分三种情况(直线上两点的坐标具体时, 直线经过原点、直线不经过原点; 直线上两点的坐标任意, 分别为 $(x_1, y_1)$ ,

$(x_2, y_2)$  且  $x_1 \neq x_2$ ), 从特殊到一般, 归纳得出

$\tan \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$  ( $x_1 \neq x_2$ ) 的结论, 都体现了数学研究中的扩

张化、一般化精神.

### 1.3 严密化精神

直线方程是对直线更精确的刻画,而确定直线方程首先就需要找到确定直线的几何要素,并用代数表示这些几何要素,从“一个点和一个方向确定一条直线”的定性刻画直线到平面直角坐标系中由点和倾斜角、斜率定量刻画直线,定性到定量的飞跃体现了数学研究的严密化精神.

## 2 “倾斜角与斜率”教学设计

### 2.1 导入情境, 启发思考

问题 1 过去在欧式几何中,大多是用偏定性化的方法研究几何图形,随着社会发展的需要,人们开始追求对几何图形更精确的代数刻画,利用代数方法研究几何图形及问题,这就是解析几何.那么在过去,平面中的哪些图形是可以代数刻画的呢?

师生活动:教师首先利用数学史,介绍解析几何的产生和基本思想,引导学生联想到点在平面直角坐标系中的坐标表示即是点的代数刻画,进而强调坐标法在解析几何中的重要地位.

设计意图:与欧式几何作比较,帮助学生建立起知识的联系,有助于知识的衔接与过渡.介绍解析几何的基本思想,帮助学生初步形成解析几何中用代数方法研究几何问题的意识.

问题 2 点动成线,线动成面.点是几何图形的基本元素,在平面直角坐标系中可以用坐标表示点,那么如何用坐标来代数化地表示直线呢?

师生活动:教师引导学生从“点”过渡到“线”,更进一步研究用坐标表示直线的方法.

追问:确定一条直线的几何要素是什么?这些几何要素能在坐标系中表示直线吗?

师生活动:教师引导学生将问题分解为寻找确定直线的几何要素,进而用代数刻画这些几何要素.学生回答两点确定一条直线,教师引导学生发现两点坐标无法直接表示直线,这时就需要思考是否存在确定直线的其他几何要素.

设计意图:从“点”到“线”体现的是数学研究中扩张化、一般化的精神,正是以这种精神作为动力,才进一步去探究用坐标代数表达直线的方法,教师在教学中需要凸显该精神的作用.两点无法直接表示直线,激发学生探究兴趣,有助于之后对直线其他几何要素的寻

找.

### 2.2 理清思路, 探究新知

问题 3 武汉长江二桥是长江上的混凝土斜拉桥.观察桥上的钢索,可以找到确定直线的几何要素吗?

师生活动:教师引导学生从实际例子中抽象出直线,并将直线放在平面直角坐标系中研究.利用直线的方向向量,首先定义直线的方向,再引导学生观察发现方向即是确定直线的几何要素之一.

设计意图:借助实际生活中的例子,更加自然.将几何图形放在平面直角坐标系中研究,是利用代数方法解决几何问题的一般步骤的第一步,体现了坐标法的基础性.

问题 4 有了方向就能唯一确定一条直线吗?

师生活动:教师利用 Geogebra 动态演示具有相同方向的直线簇(即平行直线簇)的绘制,引导学生发现点也是确定直线的几何要素,从而得出“一个点和一个方向确定一条直线”的结论.

设计意图:通过举反例的方式,培养学生数学思维的缜密性.

问题 5 如何表示直线的方向?

师生活动:教师利用 Geogebra 以演示直线的旋转变化来表现直线方向的变化,引导学生以  $x$  轴为参照,按照从倾斜程度到夹角的思路,得出直线方向、倾斜程度和直线与  $x$  轴所成夹角的一一对应关系,再引导学生将重点放在夹角的变化上,用夹角表示直线的方向.

设计意图:借助信息技术,让直线方向到直线与  $x$  轴所成夹角的过渡更加自然,学生更能体会到数学的巧妙.

问题 6 直线与  $x$  轴所成的夹角有两个,用哪一个来表示直线的方向更好呢?

师生活动:教师引导学生从“任意角”的角度,比较  $x$  轴正向与直线向上方向所成的夹角和直线向下方向所成的夹角在研究时的简洁性,从而得出倾斜角的概念以及取值范围.

设计意图:通过对比得出倾斜角的概念,有助于强调倾斜角定义的简洁性,体会数学研究的思想简洁化精神.倾斜角是对直线方向的定量刻画,体现了数学研究的严密化精神.

问题 7 倾斜角是从“形”的角度刻画直线方向,而我们的最终目的是要将直线代数化,那么如何从“数”

的角度刻画直线方向？

师生活动：教师引导学生从倾斜角与直线上两点坐标关系的角度，思考刻画直线方向的代数表达，把几何问题转化为代数问题。

设计意图：把几何问题转化为代数问题，就是用代数刻画几何，是利用代数方法解决几何问题的一般步骤的第二步，也是关键一步。用最终目的作为导向，引导学生从“形”到“数”，可以培养学生的数形结合思想。

问题8 倾斜角与直线上两点坐标有什么关系？

师生活动：教师设置三个层次的探究题，利用向量法，先带领学生研究“直线上两点的坐标具体”时的情形，再让学生以小组为单位，分类讨论探究“直线上两点的坐标任意，分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 且 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ ”时的情形下倾斜角与直线上两点坐标的关系。在对倾斜角运用三角函数时，要特别强调正切函数相对于正弦、余弦函数在计算时的简洁。最后教师总结出一般规律：

$$\tan \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2).$$

设计意图：通过三个由浅入深的问题，从特殊到一般，从具体到抽象，突破难点，体现了数学研究的扩张化、一般化精神，正是这种精神，才使得更一般的结论得以发现。比较正切函数与正弦、余弦函数，表现了数学研究的思想简洁化精神，这里教师要向学生强调这两种精神对数学研究的推动作用。将几何问题转化为代数问题后，运用代数方法求解，是利用代数方法解决几何问题的一般步骤的第三步。

问题9 当直线倾斜角为 $0^\circ$ 和 $90^\circ$ 时，上述结论仍然成立吗？

师生活动：教师引导学生考虑倾斜角取值的特殊情况，总结出一般结论 $\tan \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x_1 \neq x_2)$ 。倾斜角的正切值建立了倾斜角与直线上两点坐标之间的关系，具有重要作用，从而引出斜率 $k$ 的概念。

设计意图：单独讨论倾斜角为 $0^\circ$ 和 $90^\circ$ 时的情况，有助于学生认识到其特殊性，体会数学逻辑上的严密。强调倾斜角正切值的重要性，使得斜率的引入更自然，也能展现数学研究的思想简洁化精神。

问题10 斜率能作为刻画直线方向的代数表达吗？

师生活动：教师借助正切函数图象，引导学生分析“方向-倾斜角-斜率”的一一对应关系，得到斜率与直线方向的等价关系，从而发现斜率即是刻画直线方向的

代数表达。

设计意图：通过直线方向与斜率的一一对应关系来说明用斜率刻画直线方向的合理性，学生更易理解。斜率是对直线方向更进一步的定量刻画，体现了数学研究的严密化精神。

问题11 随着倾斜角的变化，斜率如何变化？

师生活动：教师利用Geogebra动态演示在正切函数图象上，斜率随着倾斜角变化的过程，引导学生思考斜率的性质。

设计意图：联系正切函数图象，建立起知识之间的联系，帮助学生加深对斜率概念的理解，学会灵活调用知识。

问题12 如何用直线上任意两点的坐标计算斜率？

师生活动：教师引导学生将斜率的定义和倾斜角与直线上两点坐标的关系结合起来，得到斜率的计算公式 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x_1 \neq x_2)$ ，并继续引导学生发现斜率的计算公式与两点顺序无关。

设计意图：至此可以发现用坐标表示斜率是对直线方向的完全代数刻画，结合前面对斜率随着倾斜角的变化情况的研究，给出了代数结论合理的几何解释，这是利用代数方法解决几何问题的一般步骤的最后一步。

问题13 直线的方向向量和斜率之间有什么关系？

师生活动：教师引导学生回顾直线方向向量的坐标表示，得到方向向量 $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2)(1, k)$ ，建立直线方向向量与斜率之间的关系，实现斜率与方向向量之间的相互转化。

设计意图：帮助学生从多角度认识斜率和直线的方向向量，建立起知识的联系。

## 2.3 小试牛刀，巩固强化

例1  $\alpha$ 为直线倾斜角， $k$ 为直线斜率，实现倾斜角与斜率的互化。

$$(1) \alpha = 30^\circ \quad (2) k = 1$$

$$(3) \alpha = 60^\circ \quad (4) k = -\sqrt{3}$$

例2 (教材54页例1) 已知 $A(3, 2)$ ， $B(-4, 1)$ ， $C(0, -1)$ ，求直线 $AB$ ， $BC$ ， $CA$ 的斜率，并判断这些直线的倾斜角是锐角还是钝角。

师生活动：教师引导学生应用所学知识解决问题。

设计意图：倾斜角、斜率的概念以及斜率的计算公

式是本节课的重点内容，学生需要通过例题实践巩固，教师也可借此检测学生对知识的掌握情况。

### 3 结语

总结回顾，形成体系

问题 14 今天这节课学习了哪些知识点和思想方法？

师生活动：教师与学生共同梳理本节课的脉络，利用思维导图的方式，呈现知识点和思想方法的相互渗透，同时注意总结利用代数方法解决几何问题的一般步骤，强调数学研究精神在本节课中的体现。

设计意图：总结知识及思想方法，有助于学生理清整节课思路，形成知识体系。用代数方法解决几何问题是解析几何的一般思路，需要在本节课内打好基础。数学研究精神是贯穿本节课的线索，也是探究的动力，有助于发展学生的数学素养，启发学生创造性思维。

### 参考文献

[1]新华社. 中共中央、国务院印发《中国教育现代化

2035》[EB/OL]. [https://www.gov.cn/xinwen/2019-02/23/content\\_5367987.htm](https://www.gov.cn/xinwen/2019-02/23/content_5367987.htm), 2019-02-23 /2025-01-11.

[2]任颢,陈安,张晨阳. 基础教育阶段创新型人才培养路径探析——以北京四中为例[J]. 中国教育学刊,2018, (04): 98-101.

[3]米山国藏. 数学的精神、思想和方法[M]. 上海: 华东师范大学出版社,2019: 379.

作者简介：付凝睿（2004.8-），女，汉族，湖北潜江人，湖北大学数学与统计学学院，本科，主要从事数学教育研究；严卿（1987.11-），男，汉族，湖北武汉人，湖北大学师范学院，博士，讲师，主要从事数学教育研究。

项目课题：2024 年度武汉市教育科学规划重点课题“拔尖创新人才培养的中学课程体系建设与创新机制研究”（2024A23）、2022 年度湖北大学专业学位研究生课程案例库项目“数学教学设计与实施教学案例”。