科教融合背景下线性代数教学改革的研究

王宝

宁波大学 数学与统计学院，浙江宁波，315211；

摘要：科教融合旨在提升人才培养和学术研究水平。线性代数作为理工科必修课程，对学生数学素养和解决问题能力至关重要，但教学现状存在不足。本文提出基于科教融合的线性代数教学方案，引入行列式拉普拉斯展开式、普吕克关系式和普法夫式等科研内容，并设计综合考核评价方案，涵盖课堂表现、课后作业、测试、出勤、期中/期末考试及小组项目。该方案旨在激发学生学习兴趣，提高科研能力，为未来发展奠定坚实基础。

关键词：线性代数；科教融合；考核评价

DOI：10.69979/3029-2735.25.3.054

科教融合通常是指科研活动与教育教学活动紧密结合，在科研实践当中培养学生，其目的是通过科研和教学的有机结合，提高人才培养质量和学术研究水平。2024 年 7 月，中国共产党第二十届中央委员会第三次全体会议明确指出“统筹推进教育科技人才体制机制一体改革”。以科研促进教学，开展研究型教学已经成为教育教学改革的重要课题。科教融合有利于统筹集聚创新优势资源，实现教育教学与科研的相互促进，是解决我国人才结构性不足、进一步提升创新效能的关键环节[1-3]。

1 大学线性代数教学现状

线性代数是研究变量间线性关系的一门学科，作为数学的一个重要分支，它在自然科学、社会科学、工程技术、军事和工农业生产等领域中均有广泛的应用。线性代数主要有行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与初等矩阵、n 维向量组的线性相关性和向量组的秩、线性方程组的有解判别和解的结构、方阵的特征值、特征向量与相似矩阵、向量空间和内积等内容，是理工科类、信息类等专业学生必修的一门公共理论基础课，不仅为这些学生进一步学习其它专业课打好基础，它对于培养学生的数学素养和解决实际问题的能力具有重要意义。然而，线性代数教学的现状并不令人满意，存在着一些普遍性问题。

1.1 未能充分反映学科前沿和最新成果

随着线性代数学科的不断发展，新的理论和方法不断涌现。然而，部分国内线性代数教材在编写时未能充分反映学科前沿和最新成果，导致教学内容相对陈旧和滞后。为了使学生能够接触到最新的学科知识和研究成果，教师需要不断更新教学内容，引入新的理论和方法，并关注学科发展的最新动态。

1.2 学生学习兴趣不高

由于线性代数课程的内容较为抽象和理论性较强，很多学生对这门课程的学习兴趣不高。传统的线性代数教学模式往往以讲授为主，缺乏师生互动和实践操作。而部分国内教材也未能充分体现出互动性和实践性，导致学生对知识的理解和应用能力不足，也不利于培养学生的创新能力和综合能力。为了提高学生的实践能力和学习兴趣，教师可以在教学中增加一些实践环节和案例分析，引导学生通过实际操作和问题解决来加深对知识点的理解和掌握。

1.3 重科研，轻教学现象

我国高校教师评价体系主要关注教师的科研成果和学术论文发表情况，而对于教师的教学质量和社会服务能力则关注不够。这种评价体系会导致教师重科研、轻教学的倾向，造成大学课程，例如线性代数的教学效果不够好。

2 基于科教融合的线性代数课程教学方案

笔者从事大学公共数学教学工作，例如线性代数、高等数学。在科研方面，笔者一直从事可积系统方向的工作，积累了一些经验，这为将科研方面的一些知识引入到线性代数的教学工作之中打下了基础。

2.1 行列式拉普拉斯展开式

拉普拉斯展开式在数学领域具有广泛的应用，特别是在线性代数、矩阵论和组合数学等方面[4]。它提供了一种有效的计算行列式的方法，并可用于证明各种与行

列式相关的定理和公式。传统的线性代数教材只考虑按某一行（列）展开，而实际上可以将一行的元素推广为关于 k 行的一切子式。

（拉普拉斯定理）在$1,2,\dots,n$中选定 r 个不同的正数$i_1,i_2,\dots,i_r$，剩余的记为$i_{r+1},\dots,i_n$。对于 n 阶行列式A_n，我们有下边的表示

$$A_n=\sum_{j_1<j_2<\dots<j_r}(-1)^P\Delta\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \cdot\begin{pmatrix} i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ j_{r+1} & j_{r+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix},$$

其中，$P=i_1+\dots+i_r+j_1+\dots+j_r$，$\Delta\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$表示$(a_{i_p,j_q})_{1\le p,q\le r}$对应的 r 阶行列式，$j_1,\dots,j_r$是$1,2,\dots,n$任选的 r 个数，$j_{r+1},\dots,j_n$是剩下的$n-r$个数。

这里我们用外积代数给出一个简洁的证明。取 n 个 1-形式：$w_i=\sum_{j=1}^n a_{i,j}x^j$，$i=1,2,\dots,n$。由此可以定义一个 n 阶行列式：

$$w_1\wedge w_2\wedge\dots\wedge w_n=\det(a_{i,j})x^1\wedge x^2\dots\wedge x^n.$$

将上式表示成$(w_{i_1}\wedge\dots\wedge w_{i_r})\wedge(w_{i_{r+1}}\wedge\dots\wedge w_{i_n})$，该式可以表示成 r 阶行列式和 n-r 阶行列式的乘积，这样就证明了拉普拉斯定理。

拉普拉斯展开式作为数学中的一个重要工具，具有悠久的历史和广泛的应用价值。它的提出和发展不仅推动了数学领域的发展，也为其他领域的研究提供了有力的支持。

2.2 普吕克关系式

对如下四阶行列式

$|0\quad b_1\quad b_2\quad b_3|$

应用拉普拉斯定理，可以得到

$$|c_0,c_1|\,|c_2,c_3|-|c_0,c_2|\,|c_1,c_3|+|c_0,c_3|\,|c_1,c_2|=0,$$

这里$c_i=(a_i,b_i)^T$。这就是普吕克关系式最简单的情况。当然，对于一般的 n 阶行列式也有类似的结果，并可以用 Maya 图表和 Young 图标表示。

在物理学中，普吕克关系式常用于描述物理系统的几何性质和动态行为。例如，在力学中，可以利用普吕克关系式来分析物体的运动轨迹和受力情况。此外，在电磁学、光学等领域中，普吕克关系式也有潜在的应用价值。在可积系统理论当中，KP 方程的双线性形式$(D_1^4-4D_1D_3+3D_2^2)\tau\cdot\tau=0$，恰好是普吕克关系式。

另外，普吕克关系式被用于描述和操作机器人的运动轨迹，通过计算和分析直线的普吕克坐标，可以实现机器人的精确控制和导航。在计算机视觉中，普吕克关系式被用于图像处理和识别，通过提取图像中的几何特征（如直线、边缘等），并利用普吕克坐标系进行表示和分析，可以实现图像的精确识别和测量。

2.3 普法夫式

人们对于行列式的性质已经了解的非常透彻了，但很多人对普法夫式的相关性质并不熟悉。在数学史上，普法夫式的引入和研究是为了解决特定类型矩阵的行列式计算问题。随着线性代数的发展，普法夫式逐渐成为该领域的一个重要工具，被广泛应用于矩阵理论、微分几何等多个数学分支。这一节讲述普法夫式的定义和性质。

首先，我们先回顾反对称矩阵的性质。奇数阶的反对称矩阵，对应的行列式为 0。对于偶数阶的反对称行列式，可以定义为一个普法夫式的平方。例如：

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} =(a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})^2,$$

所以我们定义普法夫式：

$(1234):=(12)(34)-(13)(24)+(14)(23)$，

其中$(i,j)=a_{i,j},\quad i<j$。更一般的，我们有$(1,2,\dots,2n)=\sum(-1)^P(i_1,i_2)(i_3,i_4)\dots(i_{2n-1},i_{2n})$，这里求和是针对$\{1,2,\dots,2n\}$中所有满足$i_1<i_3<\dots<i_{2n-1}$的两两组合求和，P 表示$i_1,i_2,\dots,i_{2n}$的逆序数。

另外，我们可以用外积定义普法夫式。令$\Omega=\sum_{1\le i<j\le 2n}b_{ij}x^i\wedge x^j,\quad b_{ij}=-b_{ji},$ 那么普法夫式

$(1,2,...,2n)$ 可以由下式定义：

$$\Omega\wedge...\wedge\Omega=n!(1,2,...,2n)x^1\wedge...\wedge x^{2n}.$$

下边我们介绍 1 个普法夫式恒等式。已知一个普法夫式的展开式

$$(a_1,a_2,...,a_{2m})=\sum_{j=2}^{2m}(-1)^j(a_1,a_j)(a_2,...,a_{j-1},a_{j+1},...,a_{2m}).$$

对上式的每个普法夫式都追加 2n 个字符 $\{1,2,...,2n\}$，我们可以得到一个普法夫恒等式

$$(a_1,a_2,...,a_{2m},1,...,2n)=\sum_{j=2}^{2m}(-1)^j(a_1,a_j,1,...,2n)(a_2,...,a_{j-1},a_{j+1},...,a_{2m},1,...,2n).$$

这个恒等式在双线性孤子方程的求解方面有非常关键的作用[4]。

除了在线性代数领域，普法夫型在微分几何方面也有很大的作用。例如，在 Chern-Gauss-Bonnet 定理中，普法夫式扮演了重要的角色。此外，在处理某些具有斜对称性质的物理问题时，普法夫式也提供了一种有效的数学工具。

3 基于科教融合的线性代数课程考核评价方案

要设计一个基于科教融合的线性代数课程考核评价方案，需要综合考虑学生的学习过程、学习成果以及科学研究的融合程度。评价应涵盖学生的理论知识、实践技能、学习态度以及科研能力等多个方面。教学过程中，应该鼓励学生参与科研项目，培养其创新意识和实践能力。如下是一个可能的考核评价方案。

课堂表现（10%）：包括课堂参与度、回答问题的准确性和积极性等。

课后作业（10%）：根据每次课后布置的作业完成情况进行评价，注重作业的质量和独立思考能力。

随堂测试（10%）：针对每章节的重要概念和理论进行随堂测试，检验学生的掌握情况。

出勤情况（10%）：记录学生的出勤情况，确保学生积极参与课堂学习。

期中考试（10%）：考核学生对前半学期所学内容的掌握程度，包括基本概念、定理和计算方法等。

小组项目（10%）：组织学生进行小组项目，如线性代数在某一领域的应用研究，培养学生的团队协作能力和科研能力。

期末考试（40%）：全面考核学生对整个学期所学内容的掌握程度，包括理论和应用两个方面。

4 结论

线性代数是学校理工科本科生的一门重要的必修课程。本科阶段的课程学习为学生未来的工作或者科研打基础，不管是科研创新能力的培养还是工作创新能力的积累，都离不开本科阶段基础课程的学习。本文以线性代数为例，把科研融入教学，设计了一个相关的教学方案和考核评价体系，旨在激发学生的学习兴趣、探索欲望，提高学生的科研能力，为将来大展宏图做好准备。

参考文献

[1]周光礼,马海泉."科教融合:高等教育理念的变革与创新."中国高教研究 2012(8):9.
[2]曹建雄.高等数学课程教学中创新能力培养的实践探索——以引入分数阶微积分为例[J].科技风，2022(29):119-121.
[3]李忠云.科教融合学术育人[J].中国高校科技,2012(1):3.
[4]日広田良吾.孤子理论中的直接方法[M].清华大学出版社,2008.

作者简介：王宝，男，汉族，籍贯河北省保定市，职称：讲师，研究方向：可积系统，单位：宁波大学，数学与统计学院。

基金项目：国家自然科学基金（12201325）；宁波大学教学研究项目（JYXM2024069）.