

线性代数在投入产出经济模型中的建模与应用

任俊辉

西安翻译学院, 陕西西安, 710105;

摘要: 目的在于通过线性代数和投入产出经济模型的理论推导与分析, 进一步探讨线性代数在投入产出经济模型中的应用, 并且通过将线性代数相关概念融入到投入产出经济模型中, 利用矩阵运算、线性方程组解法等方法对其进行分析建模, 进而更加有效的表示经济问题中各个要素之间的复杂关系, 以便更好地服务经济社会建设。该研究不仅有利于完善经济数学理论, 而且还有利于提供给经济实践更加有力的理论武器, 有助于提高经济决策的科学化和准确化, 有利于促进经济学与数学的交叉融合。

关键词: 线性代数; 投入产出经济模型; 建模; 应用

DOI: 10.69979/3029-2700.26.04.018

引言

本文旨在系统的阐述线性代数在投入产出经济模型中建模原理及应用机制, 为经济研究和实践提供更加坚实的理论依据。从线性代数出发, 同时结合投入产出经济模型的特点, 说明用向量化表示各种经济要素(产出、需求、增加值等), 用矩阵表示产业部门之间的投入来源和产出去向, 利用线性方程组解经济系统的平衡条件, 例如: 总产出与最终需求之间的对应关系; 再者, 透过具体的线性代数, 如: 经济结构分析、经济预测、政策模拟等发现其在优化资源配置、助力科学经济决策、评估产业政策冲击效果方面的重要作用。最后从理论到应用均展开相关的分析, 旨在为线性代数在经济领域中的进一步使用提供一定的参考, 并为投入产出经济模型的进一步完善和拓化提供更加充分的方法论支撑。

1 线性代数理论基础

线性代数是数学的一个主要部分, 其主要概念有: 向量、矩阵、线性方程组等, 它们都是很重要的经济模型构建和分析工具。向量是线性代数中的一种基本对象, 通常表示成有序数组的形式, 用来表示既有大小又有方向的空间量。在经济模型中可以将各个产业部门的总产出、最终需求或投入用向量来表示, 其中每一个分量就代表了某个具体的经济变量或者部门^[1]。比如, 可以用一个 n 维向量来表示有一个 n 个产业部门的经济系统, 这样就可以非常方便地反映出这个经济系统中各个经济要素之间的关系。

矩阵是线性代数的又一个重要概念, 它是矩形的数组, 常用来表示若干个经济变量间错综复杂的联系。矩阵有加法、数乘与乘法等基本运算法则, 它们是建立经

济模型的重要工具, 尤其是把直接消耗系数矩阵和完全消耗系数矩阵引入到投入产出经济模型以后, 使得各个部门间相互依存的关系能够被描述得更加准确。其中, 直接消耗系数矩阵的元素表示1个部门单位产品的产出需要消耗另一个部门的产品作为直接消耗; 而完全消耗系数矩阵额外包含了中间间接消耗, 表示最终产品需要消耗的其他产品数量。

线性方程组作为线性代数的第三大块重要内容, 是指由若干个线性方程组成的方程组, 用来描述经济系统中不同变量间的平衡关系。就投入产出经济模型而言, 线性方程组是用向量、矩阵来表示该模型, 能够揭示出该经济系统的运行状况。从方程组解的角度来分析经济平衡问题, 则是先依据经济系统的运行过程和均衡条件建立起线性方程组, 再根据线性方程组的求解方法(高斯消元法、矩阵的逆等)求解出该线性方程组, 确定在已知最终需求条件下各部门的总产出水平, 进而达到分析经济平衡的目的。

2 线性代数在投入产出经济模型中的建模

2.1 向量表示经济要素

在投入产出经济模型中, 向量作为一种基本的数学工具, 被广泛用于表示各产业部门的经济要素。总产出与最终需求是经济系统中的核心变量, 其向量化表示能够清晰地反映经济活动的结构和特征。具体而言, 设经济系统包含 n 个产业部门, 则总产出向量 X 可以表示为 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, 其中每个分量 X_i 代表第 i 个产业部门的总产出水平。类似地, 最终需求向量 Y 可以表示为 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$, 其中 Y_i 表示第 i 个产业部门的最终需求, 包括消费需求、投资需求和出口等。这种向量化表示不仅简化了复杂经济数据的表达

形式，还为后续建模提供了数学基础^[2]。

投入向量则是描述生产过程中各产业部门投入情况的另一种重要向量形式。假设经济系统中每个产业部门在生产过程中需要消耗其他产业部门的产品或服务，则投入向量 A 可以定义为 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)^T$ ，其中 A_i 表示第 i 个产业部门的总投入。投入向量的构建通常基于实际经济数据，例如各产业部门的原材料消耗、劳动力投入和资本投入等。通过投入向量，可以全面反映各产业部门在生产过程中的资源利用情况，从而为分析产业间的相互依赖关系奠定基础。

2.2 矩阵描述产业关联

$D_n \times n$ 矩阵 a_{ij} 是线性代数中一种

描述复杂经济关系的有效手段，在投入产出经济模型中，直接消耗系数矩阵和完全消耗系数矩阵都起着十分重要的作用。直接消耗系数矩阵是一个方阵，用 a_{ij} 表示第 i 个产业部门每单位总产出直接消耗第 j 个产业部门的产品数量。从数学角度来讲，直接消耗系数 a_{ij} 等于第 i 个产业部门第 j 个产业部门的实际消耗量 c_{ij} 除以第 i 个产业部门的总产出 Y_i ，具体公式如下： $a_{ij} = c_{ij} / Y_i$ 。而且，直接消耗系数矩阵反映出了各部门之间的直接技术联系，是揭示经济系统结构的重要量化基础^[3]。

完全消耗系数矩阵 $C = D + D^2 + D^3 + \dots = (I - D)^{-1} - I$ 是在直接消耗系数矩阵的基础上更加完整地体现了产业间存在间接消耗的关系，完全消耗系数矩阵的元素表示第 i 个产业部门每单位最终需求对第 j 个产业部门产品的完全消耗量（包含直接消耗和所有间接消耗），从数学上讲，完全消耗系数矩阵是由下面这个公式推导得出： $A = (I - A)^{-1}$ ，其中 A 为完全消耗系数矩阵， I 为单位矩阵。引入完全消耗系数矩阵可以使经济分析更加全面地考虑到产业之间存在的复杂联系，尤其是那些通过中间产品传导的间接消耗关系，对于了解经济系统整体运转规律有着十分重要的作用。

2.3 线性方程组求解经济平衡

线性方程组 $DX + YXDY(I - D)X = Y$ 是投入产出经济模型的重要数学工具，它表示了经济系统的平衡关系，即在经济系统中，总产出等于中间投入加上最终需求，用线性方程组来表示就是： $DX + YXDY(I - D)X = Y$ ，这里表示 n 个产业部门。经济平衡条件可以写为： $DX + YXDY(I - D)X = Y$ ，其中 X 表示总产出向量， D 表示直接消耗系数矩阵， Y 表示最终需求向量。将上述公式化为线性方程组的形式得： $DX + YXDY(I - D)X = Y$ 。通过求解该线性方程组可以得到各部门的总产出水平，为经济系统的运行提供

理论依据。

$(I - D)X = Y$ 线性方程组的求解展现了线性代数在经济分析中的实用价值，一方面由系数矩阵求得逆矩阵后，乘以最终需求向量，即得总产出向量的显式解；另一方面，逆矩阵又是列昂惕夫逆矩阵，其元素表示经济系统内各部门间的完全消耗关系。所以线性方程组的求解是经济平衡分析的数学手段，也是进一步展开经济系统结构、动态分析的理论准备。

3 基于线性代数建模的投入产出经济模型分析

3.1 经济结构分析

投入产出经济模型使用矩阵运算来分析产业间的依赖关系，利用直接消耗系数矩阵和完全消耗系数矩阵的计算以及特征分析，能够反映出经济系统内各产业部门之间的复杂联系。直接消耗系数矩阵是描述产业间直接技术经济联系的，对应矩阵的元素值就是指某个产业单位产出需要消耗别的产业的产品量；而完全消耗系数矩阵进一步地描述了产业之间的间接消耗关系，是完整的描述了经济系统的内部结构。从直接消耗系数矩阵和完全消耗系数矩阵出发，研究它们的特征值、特征向量、奇异值等矩阵特征，可找出经济结构中的关键产业和薄弱环节，其中，特征值较大的产业一般是经济系统的核心产业，而从奇异值找经济结构的瓶颈。这种基于矩阵特征的分析方法，不仅可以揭示经济系统的内在规律，而且还可以为经济结构的调整提供依据，有利于合理配置各种生产要素，以提高整个经济的运行效率。

3.2 经济预测

经济预测是投入产出经济模型的重要应用之一，通过线性模型利用线性代数的方法来进行参数估计和未来趋势预测，把时间序列数据表示成向量形式，把经济变量之间的关系用矩阵运算表示，在这个过程中主要分为四个大的步骤：数据预处理、模型构建、参数估计以及结果验证。数据预处理就是将原始数据转化为能够进行建模的数据，转变成模型可以接受的向量或者矩阵；模型构建就是根据经济理论来选取合适的线性函数形式，并且运用线性代数的方法确定模型的参数。

3.3 政策模拟

政策模拟是投入产出经济模型的重要应用之一，它用于表现政策调整后，经济系统的运行状态以及达到新平衡过程的状态。在这其中，线性代数的方法起到了重要的作用，具体体现在用以表示经济系统的平衡条件、模拟政策冲击的传导过程等方面。利用多变量线性方程

组,可以将产业部门之间的相互作用关系,以及某个部门受到外部冲击之后如何波及到所有部门都表达出来。

政策模拟的过程分为3个部分:第一是定义政策情景,也就是将政策变量赋予模型中;第二是求解新的经济平衡条件,多数情况下需要解线性方程组;第三是分析模拟结果,对比分析不同的政策情景下的经济指标,评价各种政策的效果。从线性代数的角度出发,列昂惕夫模型是一种较为常见的政策模拟工具,利用列昂惕夫逆矩阵可以获得财政政策的变化引起总产出、就业量、收入分配的各种综合影响。

4 线性代数在投入产出经济模型应用中的挑战与局限

4.1 模型假设与现实的偏差

投入产出经济模型建立的过程需要做出一些理论假设,其中最重要的假设就是比例性假设,即假设各个产业部门的生产活动与投入要素之间存在固定的比例关系,单位产出的投入量是固定的^[4]。然而,在实际的经济系统中,由于技术进步、资源稀缺、市场需求等多种因素的影响,使得实际的投入和产出并不完全成线性关系。而且,模型大多忽略了价格机制的作用,认为市场价格短期内不变,显然与实际情况不相符。这些假设与事实存在的差距可能会使模型估计的结果偏高或偏低,从而影响其应用于政策制定和经济预测的可信度。进一步看,投入产出模型还基于同质化以及完全竞争市场的假设之上:假设同一产业部门内各企业生产技术条件、管理水平一致;完全竞争市场没有垄断行为也没有市场失灵问题。但是,在现代经济中产业内异质性是普遍存在的,不同企业之间也存在规模、技术效率、资源配置等差异。

编制投入产出表是建立投入产出经济模型的前提,模型分析结果的科学性、可信度在很大程度上取决于所依据的数据质量。但高质量数据的获得并不容易。其一,投入产出表需要的数据来源较广,不仅有国民经济核算数据,还有企业调查数据和国际贸易数据等,且涉及多种统计口径、多种统计部门,不同的数据来源所采用的统计标准与方法可能不同,在数据整合时会产生不一致的问题,从而影响整个模型的精度^[5]。

4.2 线性代数方法的局限性

虽然线性代数对于投入产出经济模型具有非常大的作用,但是在面对复杂的经济关系时,线性代数的方法同样也存在一些不足之处。一方面,线性代数更偏向于描述一些静态、线性的经济现象,对于非线性的经济

关系以及动态的经济过程,线性代数的描述比较有限。就比如,现实经济系统当中,不同生产要素间的替代弹性并不是固定不变的,而是受技术进步、资源禀赋的影响,在不同的时期生产要素间的替代弹性是不同的,也就是说现实经济系统的非线性特征使传统的线性模型很难刻画出经济系统内部的多重反馈机制及阈值效应。另一方面,就比如经济系统的动态行为,比如说经济增长的周期性波动、产业结构的演变等等,往往都是有时间滞后的,而且还有路径依赖的问题,单纯用线性代数来表示显然不太合适。

5 结论

本文详细地阐述了线性代数在投入产出经济模型中建立数学模型的原则和机理,利用向量、矩阵、线性方程组将经济要素和产业关联关系表现得更为直观明了,此外总产出向量和最终需求向量还能够反映出各个产业部门的经济活动规模大小,直接消耗系数矩阵和完全消耗系数矩阵所反映的是不同产业部门间复杂的依存关系和传递效应。从这个基础上,以线性方程组为依据所做的经济平衡分析更是凸显出了线性代数对于描述经济系统的内在规律具有十分重要的作用。此方法可应用于经济结构分析、经济预测、政策模拟,可以优化资源配置,并且可以用来研判不同的产业政策对经济体系产生的冲击。为了达到这样的目的,在本文的研究之后,还应该将非线性分析、动态规划、张量分析、高维数据分析等目前较为先进的手段引入到跨学科综合模型中来,进一步提高线性代数的应用程度,进而提高模型精度、动态性和现实相关性。

参考文献

- [1]何裕平.利用线性代数探讨投入—产出模型[J].科技与创新,2018,(8):114-115.
- [2]宋慧玲;杨月梅.经济数学在经济生活中的应用[J].金融理论与教学,2013,(5):79-81.
- [3]刘凤琴.线性代数的应用特征[J].河南科技,2014,33(12):222-222.
- [4]周西云.论数学知识在市场经济管理中的运用[J].中国市场,2018,(32):193-194.
- [5]周安宁.经济生活中经济数学的应用分析[J].生产力研究,2020,(6):15-18.

作者简介:任俊辉(2004.09-),男,汉,陕西省延安市,本科。研究方向为:价格模型和成本传导机制相关研究。