微分方程在 RC 电路、弹簧振动中的建模与求解

丁瑞

西安翻译学院，陕西西安，710105；

摘要：本文主要关注微分方程在 RC 电路以及弹簧振动这两个典型物理系统里的应用情况，详细分析 RC 电路当中电荷与电压随着时间推移而产生的变化规律，同时剖析弹簧振动系统里物体的位移变化特性，说明运用微分方程构建精确模型的具体过程，探讨针对不同模型所运用的求解方式，呈现微分方程在揭示物理现象本质以及预测系统行为方面的关键作用，为相关领域的学习和研究给予一定帮助。

关键词：微分方程；RC 电路；弹簧振动；建模；求解

DOI：10.69979/3029-2727.26.05.070

引言

科学技术的进步与发展离不开对物理现象的透彻理解以及精确描述，在诸多物理系统里，RC 电路以及弹簧振动作为电学领域和力学领域的经典实例，有广泛的应用以及研究价值，RC 电路经常出现在各类电子设备当中，它的充放电过程会对电路的性能以及功能产生影响，弹簧振动在机械系统、减震装置等方面起着关键作用。微分方程作为一种有力的数学工具，可构建物理量之间的动态联系，精确描绘这些系统随着时间的变化规律，借助对 RC 电路和弹簧振动建立微分方程模型并进行求解，我们可揭示其内在的物理机制，还可为实际工程应用提供理论支撑，达成理论与实践的有机融合。

1 RC 电路中的微分方程建模与求解

1.1 RC 电路基本构成与物理现象

RC 电路是由电阻以及电容这两个基本元件所构成的，电阻对于电流的流动起到阻碍作用，它的大小借助电阻值来进行衡量，而电容有存储电荷的能力，其电容值可决定存储电荷的数量，当将 RC 电路接入直流电源的时候，电容会开始充电，在初始时刻，电容极板上不存在电荷的积累，此时电路中的电流达到最大值。随着充电过程的推进，电荷会在电容极板上逐步积累，电容上的电压也随之上升，依据欧姆定律，电阻上的电压与电流呈正比关系，电阻上的电压逐渐减小，电流同样逐渐减小，经过一段时间之后，电容充满电，电容上的电压等于电源电压，此时电路中的电流降至零。

在断开电源之后，电容会借助电阻来实现放电，电容极板上的电荷会逐步减少，而电容上的电压也会随之下降，电流的方向是与充电时相反的，随着时间不断向前推进，电荷以及电压持续减小，最终电容上的电荷和电压都会降到零，这个充放电的过程属于一个动态变化的过程，它的变化规律会受到电阻以及电容参数的作用，其中蕴含着丰富的物理本质。

1.2 建模过程

要描绘 RC 电路里电荷或者电压随着时间推移的变化情况，就得依据电路的基础定律构建微分方程模型，基尔霍夫电压定律说明，在任何一个闭合回路当中，各个元件上的电压降总和等同于电源电压，在 RC 电路进行充电的过程里，电源电压等于电阻上的电压以及电容上的电压相加之和。电阻上的电压和电流呈正比关系，而电流是电荷随着时间变化的速率，也就是电流等于电荷对时间的一阶导数，电容上的电压和电荷之间存在着固定关联，电容值等于电荷与电压的比率。

把这些物理关系给予数学转化并整合起来，假定电容上的电荷是 q，电容为 C，电阻为 R，电源电压为 U，那么可得到有关电荷 q 的一阶微分方程，此方程体现出了电荷变化速率同当前电荷值之间的关联，也就是电荷变化速率与电容上的电压以及电阻的乘积呈反比关系，而电容上的电压又和电荷量呈正比关系。要是以电容上的电压 u 作为变量，依据电容与电荷的关系，也可得到关于电压 u 的一阶微分方程，这两个方程在本质上是等价的，二者都说明了 RC 电路充放电过程中电荷或者电压的动态变化规律。

1.3 求解方法与结果分析

针对已构建的一阶微分方程而言，可运用分离变量法来开展求解工作，分离变量法的核心思路在于把方程里的变量给予分离处理，让方程的两边分别仅包含单一

变量以及该变量的导数，之后针对两边分别实施积分操作，在 RC 电路所对应的微分方程当中，把电荷 q 与时间 t 的变量分离开来，获取到两个可分别进行积分的表达式。

对分离之后的方程开展积分运算，同时结合初始条件，比如充电刚开始的时候电容上的电荷是零或者放电刚开始的时候电容上的电压等同于电源电压，可获取到电荷或者电压随着时间变化的表达式，求解的结果显示，在充电进程当中，电容上的电压随着时间呈指数上升的态势，起始阶段，电压上升的速度比较快，这是由于此时电容上的电荷数量较少，充电电流相对较大。随着时间不断增多，电容上的电荷渐渐增多，充电电流逐渐变小，电压上升的速度慢慢减缓，最终趋向于电源电压。

在放电的过程当中，电容上面的电压会随着时间呈现出指数下降的趋势，刚开始的时候，电容所储存的电荷数量比较多，此时放电电流相对较大，电压下降的速度比较快，随着电荷不断地减少，放电电流也随之逐渐减小，电压下降的速度变得缓慢，最终趋向于零，这种指数变化的规律精准地描绘出了 RC 电路充放电的动态过程，使我们可清楚地知晓电路在不同时刻的状态。比如在实际的电子定时电路里，我们可依据 RC 电路的充放电时间常数来设计恰当的电路参数，达成特定的定时功能。

2 弹簧振动中的微分方程建模与求解

2.1 弹簧振动的物理特征

弹簧振动属于力学里一个典型的简谐运动模型，要是把一个物体挂在弹簧的下端，然后把它从平衡位置拉离之后再释放，物体就会在弹簧弹力的作用之下进行往复运动，在整个振动过程当中，物体受到两个主要力的作用，分别是弹簧弹力以及阻尼力，弹簧弹力的大小与物体偏离平衡位置的位移呈正比关系，其方向始终是朝着平衡位置的。这是胡克定律的具体表现，它说明弹簧在弹性限度范围内时，弹力与形变成正比关系。

阻尼力是物体在运动进程中因受到周围介质比如空气的妨碍而产生的，其大小和物体的运动速度相关联，方向朝着与速度方向相反的方向，当物体的运动速度相对较快的时候，阻尼力会比较大，而当物体的运动速度相对较慢的时候，阻尼力则会比较小，物体的运动状态像位移、速度等会随着时间持续发生变化，呈现出周期性的特点，不过因为存在阻尼力，振动的幅度会渐渐减小。

2.2 建模思路

依据牛顿第二定律可知，物体的加速度和作用于该物体的合力之间存在正比关系，并且二者方向一致，在弹簧振动系统里，合力实际上是弹簧弹力以及阻尼力共同作用产生的合力，假定物体的质量为 m，位移为 x，弹簧的劲度系数为 k，阻尼系数为 c，物体的运动速度记作 v，而 v 是位移 x 对于时间的一阶导数，加速度记作 a，a 是位移 x 对于时间的二阶导数。

弹簧所受弹力的大小是 kx，其方向与位移 x 的方向呈相反态势，阻尼力的大小为 cv，方向与速度 v 的方向相反，把这两个力的表达式代入牛顿第二定律，便可得到一个有关物体位移 x 的二阶微分方程，此方程描述了物体位移变化的二阶导数也就是加速度，与位移本身以及位移的一阶导数即速度之间的关系，是弹簧振动系统的数学模型。它体现了物体在弹簧弹力和阻尼力共同作用下的运动规律，对分析弹簧振动特性起着关键作用。

2.3 求解过程与振动特性分析

对弹簧振动所对应的二阶微分方程展开求解时，其难度相较于其他情况会更为突出，需要依据阻尼的具体大小来区分不同的状况进行探讨。

当阻尼处于较小水平时，系统会处于欠阻尼状态，此时借助对微分方程展开求解可获取位移随时间变化的表达式，该表达式是由一个包含正弦函数与指数函数的组合构成的，这意味着物体在振动进程里，其振幅会随着时间不断推移而逐渐减小，呈现出周期性的衰减振动特性，正弦函数对振动的周期性起决定作用，而指数函数则用于描述振幅的衰减情况。这种衰减振动在实际生活中较为常见，比如钟摆于没有空气阻力等理想状况下会进行等幅振动，然而在实际环境当中，因空气阻力的存在，钟摆的振幅会逐步减小，最终致使钟摆停止摆动，这便是欠阻尼振动的具体表现。

当阻尼达到特定数值时，系统会处于临界阻尼状态，此时求解微分方程所得到的位移表达式显示出物体可最快地回归至平衡位置且不会出现振动情况，临界阻尼属于一种特殊阻尼状态，在实际的减震系统里，一般期望系统可达成临界阻尼，如此可在最短时间让物体恢复到稳定状态，防止过度振动给系统带来损害。

当阻尼数值较大时，系统便处于过阻尼状态，此时

物体同样会回到平衡位置，不过其过程相对较为缓慢，并且不存在振动现象，位移随着时间的变化呈现出一个单调递减的函数，物体逐步趋近于平衡位置，比如在一些重型机械的减震装置当中，要是阻尼设计得过大，机械在遭受冲击之后虽说不会出现十分突出的振动，然而恢复到平衡位置所需的时间会比较长，对机械的正常运行效率产生影响。

借助对不同阻尼状况下微分方程展开求解以及分析，可深入理解弹簧振动系统各类行为模式，为实际弹簧系统的设计与控制给予理论支撑，比如在设计汽车悬挂系统之际，要依据车辆行驶需求以及路况，合理挑选弹簧的劲度系数与阻尼系数，让悬挂系统处于适宜的阻尼状态，保证车辆行驶平稳，同时提升乘坐舒适性。

3 微分方程建模与求解的意义

微分方程于 RC 电路以及弹簧振动里的建模与求解有着诸多意义，从理论角度而言，它给予了一种统一且精确的方式去描述并分析物理系统的动态行为，借助构建微分方程模型，把物理现象中的各类因素做了数学抽象与整合，呈现出物理量间的内在关联以及变化规律，这种理论上的理解拓展了我们对物理世界的认知，为探寻更复杂的物理系统奠定了根基。

在实际应用场景当中，微分方程的建模以及求解所起到的作用是十分关键且不可缺少的，就拿 RC 电路来说，借助对微分方程展开求解，可设计出适宜的电路参数，达成特定的充放电时间要求，这种情况在电子设备的定时、滤波、信号处理等各类电路里有着较为广泛的应用，比如在数码相机的闪光灯电路当中，运用 RC 电路的充放电特性可对闪光灯的充电时间以及闪光强度给予控制，以此保证拍摄效果的质量。

对于弹簧振动系统而言，了解其振动特性可帮助设计减震装置以及优化机械系统性能，在建筑工程当中，借助分析建筑物于地震等外力作用时的振动状况，构建相应的微分方程模型并加以求解，可设计出合理的建筑结构，以此提升建筑物的抗震能力，在航空航天领域，对飞行器在飞行过程里的振动展开分析与控制，可保障飞行器的稳定性与安全性，提升飞行性能。

4 结论

本文围绕 RC 电路以及弹簧振动这两个有代表性的物理系统展开研究，充分呈现了微分方程在建模以及求解过程里的关键作用，在 RC 电路当中，微分方程精准地描绘出了电荷以及电压随着时间推移呈现出的指数变化规律，为电子电路的设计以及优化给予了理论方面的支撑，在弹簧振动系统里，微分方程揭示出了物体在不同阻尼状况下的振动特性，为机械系统的减震设计以及性能提高提供了相应指导。

构建恰当的微分方程模型并加以求解，可让我们对物理现象本质有更深刻的理解，把理论知识和实际应用紧密结合在一起，随着科技持续进步，微分方程在更多领域的应用会不断拓展延伸，在探索自然、改造世界方面提供更强大的工具，未来学习和研究里，要掌握微分方程的建模与求解方法，提升用数学知识解决实际问题的能力，推动科技不断发展。

参考文献

[1]何松林.双弹簧振子横向振动微分方程的近似解[J].昆明学院学报,2011(3):96-99.

[2]樊尚春.科技应用中的微分变分模型振动弹簧模型[M].//科技应用中的数学模型研究.北京:科学出版社,2004:100-120.

[3]张伟.振动线性微分方程模型[J].数学科学学院学报,2021(4):10-15.

[4]王树禾.微分方程模型与混沌[M].合肥:中国科学技术大学出版社,1999:50-70.

作者简介：丁瑞（2006.07——），籍贯：新疆伊宁市，汉族，女，学历：本科，研究方向：微分方程应用 + 物理/电工数学建模研究。