

基于补零的主瓣拟合三谱线插值频谱校正算法研究

胡婧雯¹ 贾豫东^{1,2} (通讯作者)

1 北京信息科技大学 仪器与光电学院, 北京, 100192;

2 生物医学成像北京实验室, 北京, 100871;

摘要: 针对离散信号在低信噪比条件下频谱峰值易受噪声淹没、以及离散傅里叶变换栅栏效应导致频率估计精度不足的问题, 本文提出一种基于补零的窗函数主瓣拟合三谱线插值算法, 该算法利用汉宁窗主瓣的精确几何特征建立频偏与谱线幅值比的数值映射关系并推导至各种通用窗函数, 通过构建频偏与不同窗函数谱线幅值比的映射关系, 在消除算法系统误差的同时, 避免复杂实时方程的求解。仿真结果表明, 在低信噪比下, 该算法基于各个窗函数的主瓣拟合误差 $|S(k)|$ 在 $[-0.5, 0.5]$ 内均在 10^{-4} 左右, 系统误差均小于 10^{-4} , 此外, 采用本文算法在不同信噪比下的均方根误差 RMSE 约为 0.08Hz, 相较于其他经典插值算法具有更低的 RMSE 和更强的抗噪声性能。

关键词: 离散信号; 主瓣拟合; 加窗补零; 插值法

DOI: 10.69979/3041-0673.26.04.007

引言

在低信噪比的离散信号处理中, 插值法是目前研究的最多、应用最广泛的离散频谱校正算法^{[1][2]}, 该方法主要是通过已知的谱线加权比值来拟合精确频率。Agrez 提出通过频谱幅值最大的三条谱线的校正方法, 给出了特定窗函数的校正公式^[3], 然而窗函数种类的局限性限制了更多的使用场景。D.Belega 在此基础上继续研究^[4], 将此算法推广为多个谱线插值, 适用于最大旁瓣衰减窗函数, 但在较宽谱线和较低信噪比的下谱线难以控制误判概率的情况下, 谱线密度对分辨率的影响并未得到解决。除利用频谱幅值的比值, 一些学者提出基于复数谱的插值算法。B.G. Quinn 提出一种未加窗的傅里叶系数复比值插值法^[5]。此外, E. Aboutanos^[6]提出了迭代复比值的插值法, 通过研究表明其具有良好的统计特性。然而, 解析类插值法是基于其窗函数主瓣抛物线或高斯近似假设, 频偏较大时会产生不可忽略的系统误差, 甚至在信噪比极低时可能会产生信号的初始定位错误^[7], 因此上述算法已经无法满足在微弱信号中实现高精度谱估计。本文提出一种基于补零的窗函数主瓣拟合三谱线插值算法, 该算法利用汉宁窗主瓣的精确几何特征建立频偏与谱线幅值比的数值映射关系并推导至各种通用窗函数, 通过构建频偏与不同窗函数谱线幅值比的映射关系, 在消除算法系统误差的同时, 避免复杂实时方程的求解。

1 基于补零的主瓣拟合三谱线插值算法

1.1 补零和频谱采样

补零技术是在时域有效信号后填补一些零值, 以扩展原序列长度, 进而获得原频谱更多谱分量细节的一种技术。为方便起见, 补零的数目为原始数据的整数倍, 因此补零加窗的离散信号有:

$$x_{ap}(n) = \begin{cases} x_w(n), & 0 \leq n < N \\ 0, & N \leq n < MN \end{cases} \quad \text{式 1}$$

其中在原始信号后增添了 $(M-1) \times N$ 个零值, M 为扩展因子, N 为原序列长度, $x_w(n)$ 为加窗后的时域序列, $x_w(n) = x(n)w_N(n)$, w_N 为窗函数的时域序列。根据离散傅里叶变换的定义推导补零加窗后信号的频谱为:

$$X(k) = \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} W_N(k - \lambda_0) + \frac{A_0}{2} e^{-j\theta_0} W_N(k + \lambda_0) \quad \text{式 2}$$

$W_N(k)$ 为窗函数的傅里叶变换, λ_0 为频谱估计的真实频率。加窗后虽无法改善谱峰间的分辨能力及混叠误差等 DFT 的一些基本限制, 但通过插值在频率间隔内插入 $M-1$ 条谱线, 使信号频谱的频率间隔更小, 频率采样将更加精确。

通常来说由于非整周期采样, 真实频率 λ_0 恰好落在谱线上的概率较小, 一般位于两谱线之间, 因此 λ_0 可进一步表示为整数部分 l 和小数部分 δ ($-0.5 < \delta < 0.5$), 展开得最高谱线幅值为:

$$|X_{ap}(l_{ap})| = \left| \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} W_N(-\delta_{ap}) + \frac{A_0}{2} e^{-j\theta_0} W_N\left(\frac{2l_{ap}}{M} + \delta_{ap}\right) \right| \quad \text{式 3}$$

其中 l_{ap} , δ_{ap} ($-0.5 < \delta_{ap} < 0.5$) 分别为补零后 $M\lambda_0$ 的整数

和小数部分且有 $\delta_{ap} = \delta/M$ 。至此,可得补零后信号频谱的最大谱线及两条次大谱线为 $|X_{ap}(l_{ap})|, |X_{ap}(l_{ap} + 1)|, |X_{ap}(l_{ap} - 1)|$ 。

1.2 汉宁窗的三谱线插值法

式3第二项代表镜像频率的泄露能量,可认为泄露能量较小忽略不计,且对于汉宁窗有 $|W_N(k)| \cong \sin(\pi k)/h(k), h(k) = 2\pi k(1 - k^2)$, $h(k)$ 为汉宁窗的窗函数,将汉宁窗的谱函数代入式3可进一步得到最大谱线及两条次大谱线为:

$$|X_{ap}(l_{ap})| \cong \frac{A_0 \sin(\pi\delta_{ap})}{2 h(\delta_{ap})} \quad \text{式 4}$$

$$|X(l_{ap} + 1)| \cong \frac{A_0 \sin(\pi\varepsilon - \pi\delta_{ap})}{2 h(\varepsilon - \delta_{ap})} \quad \text{式 5}$$

$$|X_{ap}(l_{ap} - 1)| \cong \frac{A_0 \sin(\pi\varepsilon + \pi\delta_{ap})}{2 h(\varepsilon + \delta_{ap})} \quad \text{式 6}$$

其中 $\varepsilon = 1/M$,展开式中的正弦函数并进行式4、式5、式6合并有:

$$h(\delta_{ap} + \varepsilon)|X(l_{ap} - 1)| + h(\delta_{ap} - \varepsilon)|X(l_{ap} + 1)| \cong 2|X(l_{ap})|h(\delta_{ap})\cos \pi\varepsilon \quad \text{式 7}$$

为得到窗函数的幅值比与归一化频偏的关系,引入两个变量 γ_1, γ_2 ,定义:

$$\gamma_1 = \frac{|X(l_{ap}-1)|}{|X(l_{ap})|} \quad \text{式 8}$$

$$\gamma_2 = \frac{|X(l_{ap}+1)|}{|X(l_{ap})|} \quad \text{式 9}$$

其中 γ_1 :左邻谱线与主峰谱线的幅值比, γ_2 :右邻谱线与主峰谱线的幅值比。

因此式7可记为:

$$h(\delta_{ap} + \varepsilon)\gamma_1 + h(\delta_{ap} - \varepsilon)\gamma_2 = 2h(\delta_{ap})\cos \pi\varepsilon \quad \text{式 10}$$

将 $h(\delta_{ap} + \varepsilon), h(\delta_{ap} - \varepsilon), h(\delta_{ap})$ 展开可得归一化校正频率与峰线幅值比 γ_1, γ_2 的一元二次方程:

$$a\delta_{ap}^3 - b\delta_{ap}^2 + c\delta_{ap} + d = 0 \quad \text{式 11}$$

$$\text{其中 } a = 2\cos \pi\varepsilon - (\gamma_1 + \gamma_2), b = -3(\gamma_1 - \gamma_2)\varepsilon, c = (\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{2\cos \pi\varepsilon}{1-3\varepsilon^2})(1 - 3\varepsilon^2), d = (\gamma_1 - \gamma_2)(\varepsilon - \varepsilon^3).$$

根据 R. C. Dorf 的研究^[10]和根范围的合理性^[11],方程存在唯一有意义的解,最终可得汉宁窗的归一化校正频率为:

$$\delta_{ap} = t_2 = t_0 + 2\sigma\cos(2\pi/3 - \varphi) \quad \text{式 12}$$

$$\text{其中 } t_0 = \frac{-a}{3b}, \sigma = \sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}}, \varphi, \sigma, t_0 \text{ 由比值 } \gamma_1, \gamma_2 \text{ 和补零因子 } \varepsilon \text{ 决定。}$$

1.3 扩展为经典窗函数的三谱线插值法

除汉宁窗,其他经典窗函数在实际应用的使用也较多,使用主瓣拟合技术将三谱线插值法扩展至其他经典窗函数很有必要。设:

$$S(k) = [W_C(k)]^q - W_H(k) \quad \text{式 13}$$

其中 $W_C(k)$ 为任意经典窗函数的归一化频谱, $W_H(k)$ 为汉宁窗的归一化频谱,系数 $[q = SL_{Han}/SL_{w(n)}$, SL_{Han} 和 $SL_{w(n)}$ 分别为汉宁窗和上式中对应的窗函数的扇形损失。为了得到 $[W_C(k)]^q$ 与 $W_H(k)$ 的关系,进而由汉宁窗的校正公式推导至经典窗函数,需要通过仿真分析不同窗函数的的主瓣拟合误差。

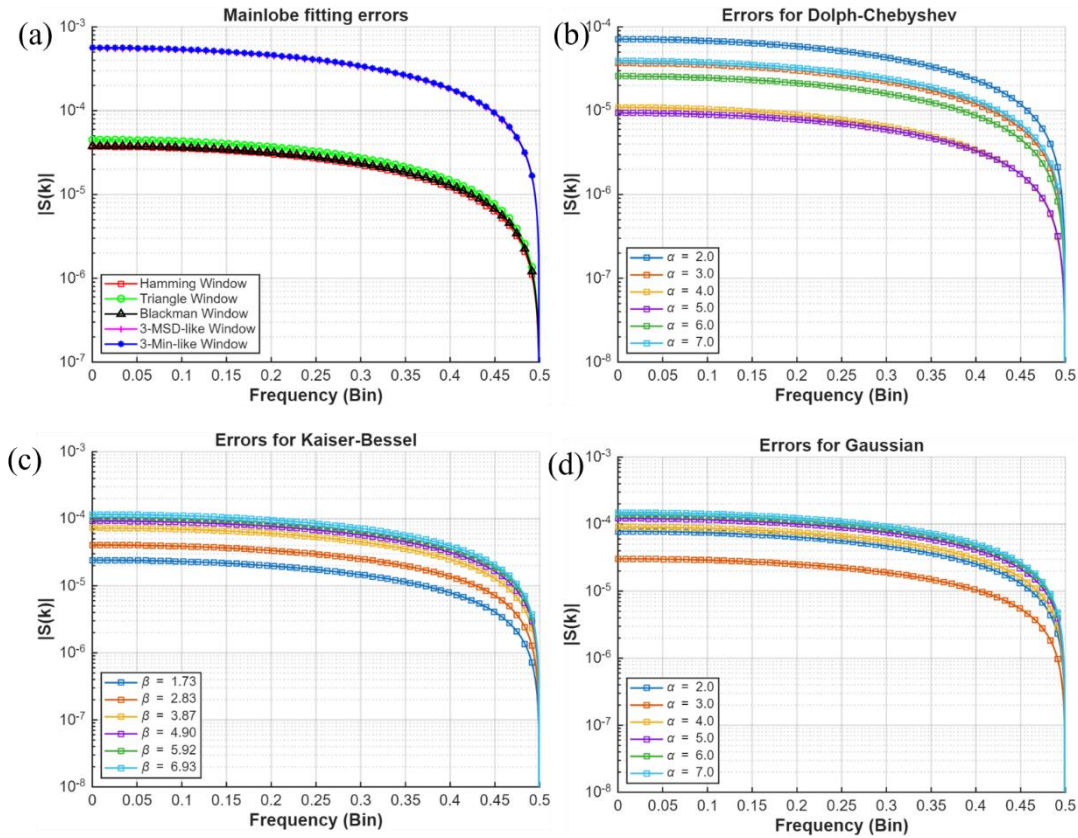


图 1 不同窗函数的主瓣拟合误差

Figure 1 Main Lobe Fitting Error of Different Window Functions

通过仿真，观察图 1 发现，当 δ 在 $[-0.5, 0.5]$ 范围内，大多数窗函数的主瓣拟合误差 $|S(k)|$ 都非常小。图 1 中子图(a)汉明窗、三角窗以及其他窗函数的 $|S(k)|$ 最大值仅不足 10^{-4} ，对于一些其他的优化窗，例如子图(b)的切比雪夫窗，子图(c)贝塞尔窗，子图(d)高斯窗，其主瓣误差 $|S(k)|$ 在 $[-0.5, 0.5]$ 内均在 10^{-4} 左右。这表明，若能保证最大的三条谱线在 $[-0.5, 0.5]$ 这一范围，完全可以用 $[W_C(k)]^q$ 代替 $W_H(k)$ 。当采用这些窗函数时，就可以用汉宁窗校正公式得到归一化频谱校正值。

通过补零技术加密谱线，可保证当 $M \geq 3$ 时所选用校正的一条最大谱线和两条次大谱线都位于 $[-0.5, 0.5]$ 这一误差区域内。考虑到 FFT 的快速算法基本原理及补零的算法量，综合频谱校正的实时性考虑，实际工程中一般选用 $M=4$ 。

2 三谱线插值法仿真研究

2.1 系统误差

频谱校正算法的推导是建立在汉宁窗谱函数的基础上，为了计算方便，我们进行了近似处理，因此会引入误差，此外我们在频谱校正中忽略了镜像频率泄露的问题，这些近似处理会在无噪声干扰时使算法对频谱校正产生一定的误差，也即系统误差。通过仿真分析系统误差对频谱校正的影响。在计算系统误差时设置仿真条件为：采样频率设为 1024Hz,数据总长度 N 为 1024，设置补零因子 M 为 4，频率分辨率为 1Hz。对于每一 DFT 谱线 k ,在区间 $[k-0.5, k+0.5]$ 内进行频率扫描，步距为 0.05，而每一个步距频率的相位在 $(-\pi, \pi)$ ，步距为 $\pi/72$ ，也即对每一根 DFT 谱线都产生了 2880 个测试信号，该谱线的系统误差记为其与理论信号的最大误差。图 5 到图 8 显示了不同窗函数下三插值谱线的系统误差（以归一化频率为变量）。

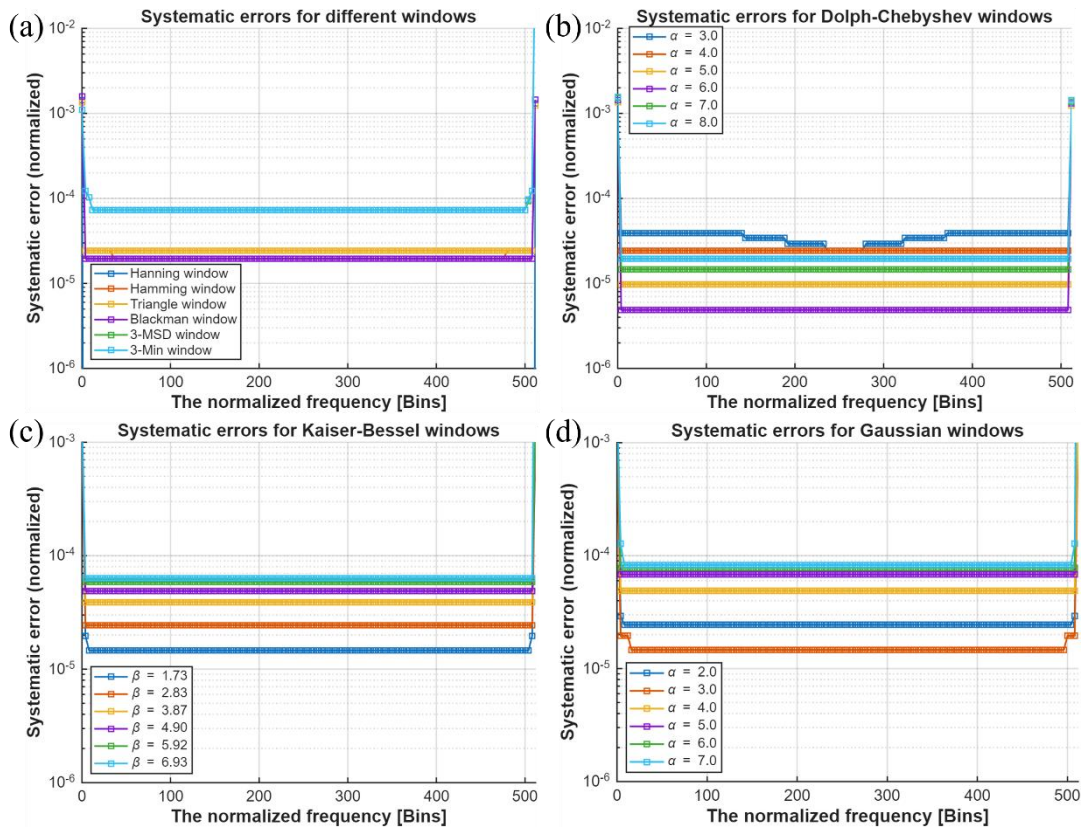


图 2 不同窗函数的系统误差

Figure 2 System errors of different window functions

根据图 2 的子图(a)仿真结果,在接近直流分量(归一化频率 $k \approx 0$)和奈奎斯特频率 ($k \approx N/2 = 512$)的低频与高频边缘区域,系统误差出现急剧上升。这是由于在这些区域,正频率谱线与负频率镜像谱线的主瓣发生严重重叠,忽略镜像频率泄露的近似处理导致了较大的理论误差。当谱线频率 $k > 5$ 且 $k < N/2 - 5$, 镜像频率的影响迅速衰减,最大频率误差均小于 10^{-4} ,系统误差曲线趋于平坦且维持在极低的水平。这表明算法在绝大多数有效的工程频带内具有极高的稳定性。针对具有可调参数的窗函数,误差水平表现出对窗参数的依赖性,子图(b)的切比雪夫窗函数的误差特性较为复杂,并不随旁瓣衰减参数 α 呈简单的单调变化,但在 $\alpha = 6.0$ 附近取得了极低的误差极值,约 5×10^{-6} 。子图(c)的贝塞尔窗随着参数 β 的增大系统误差也随之增大。但即便在 $\beta = 6.93$ 的最差情况下,误差依然控制在 10^{-4} 量级以内。子图(d)的高斯窗随着形状参数 α 从 2.0 增加至 7.0,中心频带的系统误差基底呈现单调上升趋势。当 $\alpha = 2.0$ 时误差最低,约为 2×10^{-5} ;而当 $\alpha = 7.0$ 时,误差上升至接近 10^{-4} 。这说明较窄的主瓣更有利于降低该插值算法的系统误差。总之,当被测信号频率 λ_0 满足 $\lambda_0 > 5$ 且 $\lambda_0 < N/$

2-5 时,各种窗函数下的最大频率校正误差均小于 10^{-4} 。该精度完全满足大多数工业现场检测及精密分析的工程应用需求。因此,在后续的实际应用与噪声分析中,由算法近似带来的系统误差可以被忽略不计。

2.2 插值算法性能对比

为验证本文提出的基于补零及主瓣拟合的三谱线插值算法 (Proposed IpZPMF) 在频率估计中的有效性与鲁棒性,本节通过蒙特卡洛仿真实验,将其与现有的经典插值算法进行了对比分析。实验信号模型采用加性高斯白噪声 (AWGN) 模拟极低信噪比环境下,在信噪比 SNR 在 $[-10\text{dB}, 10\text{dB}]$ 范围内,以算法估计的均方根误差 (RMSE) 为评价指标,对比在归一化频偏 δ 下的算法性能。

除了对本文的三谱线插值法 IpZPMF 进行仿真外,还给出了一些具有代表性的频谱校正插值算法仿真结果。包括 T.Grandke 提出的适用于汉宁窗的 Gran83 两点插值法, D.Agrez 提出的适用于汉宁窗的 Agr02 三点插值法, E.Jacobsen 提出的基于幅值谱的 Jac07 三点插值法,整体仿真结果如下:

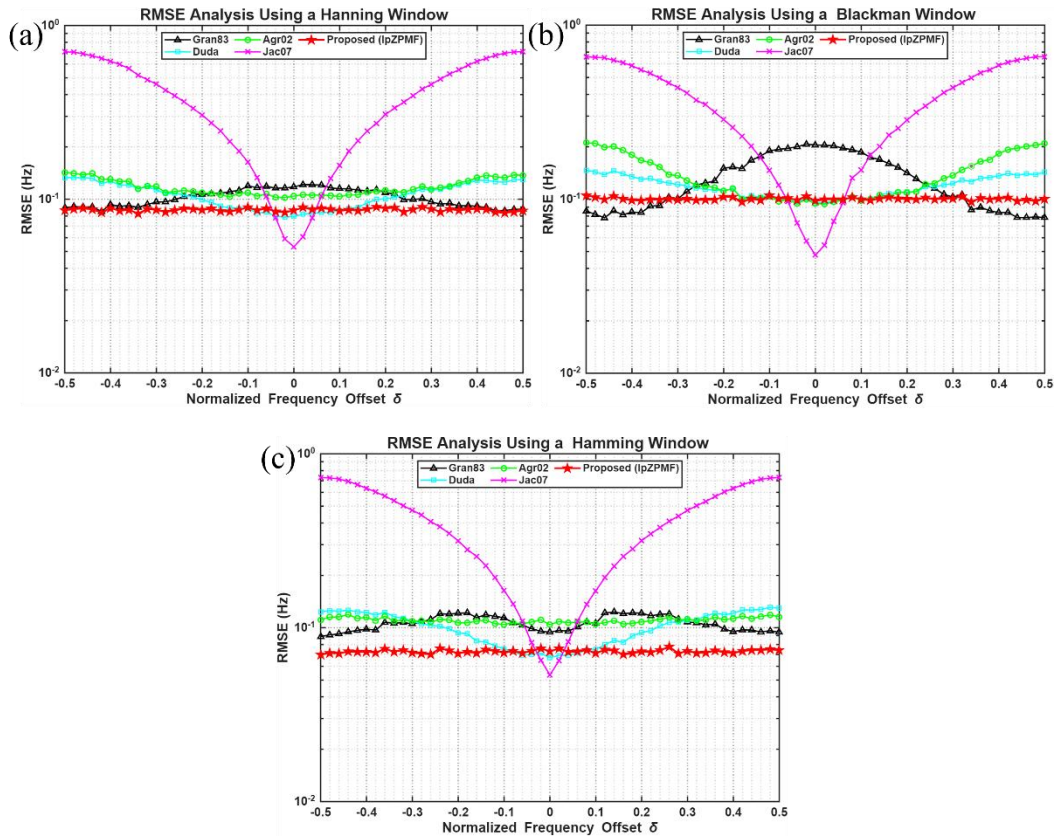


图3 不同算法在各个窗函数的RMSE对比

Figure 3 Comparison of RMSE of different algorithms across various window functions

图3分别展示了不同校正插值算法在各种窗函数的仿真结果图, (a)是加汉宁窗, (b)是加布莱克曼窗, (c)是加海明窗。观察图3, 可以发现无论是在汉宁窗、海明窗还是布莱克曼窗下, 本文提出的IpZPMF算法的RMSE曲线在整个频率偏移区间 $\delta \in [-0.5, 0.5]$ 内均呈现出近似平坦的直线特征。表明该算法具有优异的频率全域一致性, 其估计精度几乎不依赖于信号频率在DFT频点间的具体位置。此外, IpZPMF的RMSE曲线始终位于其他对比算法的下方。这意味着在不同窗函数条件下, 本文算法能够获得最小的频率估计误差。特别是在子图(a)中, 尽管Gran83和Agr02是专为汉宁窗设计的经典算法, 但IpZPMF依然表现出了更低的误差, RMSE约为0.08Hz左右, 且没有出现其他算法中常见的波纹状起伏。仿真结果有力地证明了IpZPMF算法在频率估计方面具有高精度和高稳定性的双重优势, 不仅在统计意义上获得了最小的均方根误差, 而且成功消除了频率偏移量对估计精度的影响, 表现出卓越的鲁棒性。

3 结论

本文针对离散频谱分析中传统插值算法通用性差

及抗噪性能不足的问题, 提出并验证了一种基于补零技术与主瓣拟合的通用三谱线插值校正算法。传统插值算法通常依赖于特定窗函数的解析式, 适应性较弱, 本文算法基于不同窗函数建立了谱线幅值比与归一化频偏之间的通用映射关系。仿真结果表明, 在 $[-0.5, 0.5]$ 的频偏区间内, 基于不同窗函数该算法的主瓣拟合误差及系统偏差均控制在 10^{-4} 量级以内, 并在保证系统误差 $<10^{-4}$ 的同时, 未引入复杂的迭代运算, 保持了较高的运算实时性。这证明了该算法能够有效克服解析法对窗函数类型的依赖, 具有更强的数学普适性和实时性。

算法的时域补零技术有效增加了频域的谱线密度, 降低了栅栏效应的影响; 结合三谱线联合插值机制, 利用主瓣内的频谱能量信息, 在抑制噪声干扰方面表现出显著优势。仿真对比实验表明, 即使在低信噪比下, 该算法的频率估计均方根误差(RMSE)仍能稳定在0.08Hz左右。相较于传统的双点或三点插值算法, 本算法在同等噪声水平下具有更低的RMSE和更强的稳定性, 实现了高精度的频率校正, 具有重要的工程应用价值。

参考文献

- [1] 靳笑晗, 汪岳峰, 竹孝鹏, 等. 相干多普勒测风激光雷达低信噪比区域回波信号的估计方法[J]. 光学与光电技术, 2013, 11(3): 10-14. DOI: CNKI:SU N:GXGD. 0. 2013-03-004.
- [2] 孙宸, 胡嘉龙, 王昆, 等. 基于小波变换的激光雷达回波信号去噪方法研究[J]. 雷达与对抗, 2022, 42(4): 20-22, 57. DOI: 10.19341/j.cnki.1009-0401.2022.04.006.
- [3] Agrež D. Weighted multipoint interpolated DFT to improve amplitude estimation of multifrequency signal[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2002, 51(2): 287-292.
- [4] Belega D, Dallet D. Frequency estimation via a weighted multipoint interpolated DFT[J]. IET Science, Measurement and Technology, 2008, 2(1): 1-8.
- [5] Quinn B G. Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(5): 1264-1268.
- [6] Aboutanios E, Mulgrew B. Iterative frequency estimation by interpolation on Fourier coefficients[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(4): 1237-1242.
- [7] Rife D, Boorstyn R R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20(5): 591-598.
- [8] 罗涛. 相干测风激光雷达多普勒频移估计技术研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2022. DOI: 10.27005/d.cnki.gdzku.2022.002703.
- [9] 步志超. 相干测风激光雷达系统设计及数据处理算法研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2014.
- [10] Nickalls R W D. A new approach to solving the cubic: Cardan's solution revealed[J]. The Mathematical Gazette, 1993, 77(480): 354-359.
- [11] 罗久飞. 离散频谱校正新方法及其抗干扰性能研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2015.

作者简介: 胡婧雯(2000年—), 女, 硕士研究生, 主要从事激光测风雷达信号算法方面的研究。

导师简介: 贾豫东(1975年—), 男, 博士, 教授, 硕士生导师, 主要从事光电检测、先进光电子器件的研究。